

MODELO ESTADÍSTICO PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MATERIA EN DISCOS PROTOPLANETARIOS

NIDIA YISETH BUITRAGO CARREÑO



Uptc
Universidad Pedagógica y
Tecnológica de Colombia

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS - ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE ASTROFÍSICA Y COSMOLOGÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS - FÍSICA
TUNJA (BOYACÁ)
2018

MODELO ESTADÍSTICO PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MATERIA EN DISCOS PROTOPLANETARIOS

NIDIA YISETH BUITRAGO CARREÑO

Trabajo de Grado para optar el Título de Maestría en Ciencias - Física

Director:
Dr. NICANOR POVEDA TEJADA



Uptc
Universidad Pedagógica y
Tecnológica de Colombia

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS - ESCUELA DE FÍSICA
GRUPO DE ASTROFÍSICA Y COSMOLOGÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS - FÍSICA
TUNJA (BOYACÁ)
2018

Nota de Aceptación

Los abajo firmantes certifican que han revisado el trabajo de grado titulado “Modelo estadístico para establecer la distribución de materia en discos protoplanetarios” de la estudiante Nidia Yiseth Buitrago Carreño y recomiendan a la Escuela de Posgrados de la Facultad de Ciencias aceptarlo como requisito para optar el título de Maestría en Ciencias - Física.

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Director del Trabajo

Firma del Coordinador de Posgrados

Dedicatoria

*“ Nuestra mejor edad es la que tenemos ahora, ni un segundo más, ni
un segundo menos. ”*
Walter Riso.

*A Dios por darme vida y con ello me dió todo, a mi hija Paula Samanta por ser la
mayor motivación hacia todos mis logros, y a mis padres, por su amor, compañía,
trabajo y sacrificio para llegar hasta aquí.*

Declaración

El trabajo de grado “Modelo estadístico para establecer la distribución de materia en discos protoplanetarios” está contemplado dentro de la línea: Dinámica de los discos protoplanetarios, del Grupo de Astrofísica y Cosmología (GAC) de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.



Astrofísica y Cosmología
Grupo de Investigación - UPTC

Agradecimientos

A Dios, el gran gestor de todos mis logros y mi compañero permanente...

A Paula Samanta, por permitirme trabajar en esto sacrificando nuestro tiempo...

A mis padres por facilitarme los medios para culminar este proceso...

A mi familia, por motivarme a continuar...

A la universidad, por permitirme estar en la academia y a sus docentes quienes con la enseñanza hicieron que pueda crecer en valiosos conocimientos ...

Al director del proyecto, Dr. Nicanor Poveda Tejada, por su dedicación, paciencia, apoyo incondicional, amistad y oportunas aclaraciones...

A mis jurados por aceptar y ser parte en la culminación de este proceso...

Al grupo de Astrofísica y Cosmología (GAC), de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia por permitir el desarrollo de mi trabajo dentro de las líneas de investigación que maneja...

“Si he sido capaz de ver más lejos, se debe a que estaba trepado a hombros de gigantes”.

Isaac Newton.

Resumen

MODELO ESTADÍSTICO PARA LA DISTRIBUCIÓN DE MATERIA EN DISCOS PROTOPLANETARIOS

NIDIA YISETH BUITRAGO CARREÑO

RESUMEN

Los sistemas planetarios tienen su origen en el colapso gravitacional de una nube de gas y polvo. Mediante un proceso de acreción se forma una estrella masiva y un disco de planetesimales orbitando la estrella. Mediante consideraciones estadísticas se obtiene un modelo el cual permite describir la distribución de materia del sistema estrella-planetesimales. Se determinan los parámetros del modelo para el Sistema Solar, satélites, exoplanetas y el sistema HL-Tauri. Se demuestra que el radio, excentricidad, energía, momentum angular e inclinación orbital, de los objetos planetarios formados toman valores discretos, dependiendo solamente del valor de la masa de la estrella. A diferencia de otros modelos, la formación de objetos planetarios es más rápida.

ABSTRACT

The planetary systems have their origin in the gravitational collapse of a cloud of gas and dust. Through an accretion process a massive star and a disk of planetesimals are formed orbiting the star. Through statistical considerations a model is obtained which allows to describe the distribution of matter of the star-planetesimal system. The parameters of the model for the solar system, satellites, exoplanets and the HL-Tauri system are determined. It is shown that the radius, eccentricity, energy, angular momentum and orbital inclination of the planetary objects formed take discrete values, depending only on the value of the mass of the star. Unlike other models, the formation of planetary objects is faster.

Índice general

Resumen	VII
Introducción	1
1. Disco protoplanetario	3
1.1. Colapso de la nube protoplanetaria	3
1.2. Evolución del disco protoplanetario	5
1.3. Formación del Sistema Solar	8
2. Dinámica orbital	13
2.1. Órbitas de los planetesimales	13
2.1.1. Distancia media y media temporal de la distancia	16
2.1.2. Órbitas de los planetas	16
3. Modelo estadístico	21
3.1. Discos de transición	21
3.2. Inclinação de Discos de transición.	25
3.3. El modelo para el disco de transición	26
3.4. Modelo para el disco protoplanetario	35
4. Proceso de simulación	40
4.1. La distribución radial y angular	41
4.2. Inclinação del disco	44
4.3. Proceso de colisión	44
5. Sistema Solar	45
5.1. Determinación del radio mínimo	45
5.2. Radio, energía y momentum angular orbital	46
5.3. Migración orbital	50
5.4. Satélites	51
6. Distribución de masa de HL-Tauri	54
6.1. El Disco HL-Tauri	54
6.2. Distribución de planetesimales	56

6.3. Tratamiento de la fotografía	56
Conclusiones	60
Referencias	61
A. Distribución Gamma	66
B. Relación entre la distribución Erlang y Poisson	69

Índice de figuras

1.1. Nube molecular interestelar de polvo y gas denominada LD1551 ubicada en la constelación de Tauro muestra la formación de varias estrellas con sistemas circunestelares a su alrededor, por ejemplo, el sistema planetario HL-Tauri. (Imagen cortesía Telescopio Espacial Hubble)	4
1.2. Un mapa espacial del gas CO en La Vía Láctea, la concentración de CO aumenta a medida que nos acercamos al centro de la galaxia [Kuno et al., 2007].	5
1.3. Ejemplo de distribución espectral de la energía en un disco protoplanetario, es decir, la emisión térmica observable a lo largo del disco (adaptación deDullemond et al. 2007).	6
1.4. Etapas de formación de un sistema planetario y clasificación del origen de la distribución espectral de energía. (adaptación de Dullemond et al. 2007).	7
1.5. Inclinação orbital de los exoplanetas encontrados alrededor de las estrellas [Akeson et al., 2013].	9
2.1. Trayectorias posibles dependiendo de la excentricidad [Goldstein, 1994].	15
2.2. Sistema estrella-planeta orbitando mutuamente su centro de masa. . .	17
2.3. Movimiento de la masa reducida bajo un potencial central.	18
2.4. Variación de la excentricidad orbital de La Tierra en el último millón de años[Berger, 1988].	19
2.5. Variación del momentum angular y la inclinación orbital.	20
3.1. Estructura de gas y polvo de un disco de transición.	22
3.2. Perfil de densidad superficial genérica del gas (color verde) y el polvo (color gris) [van der Marel et al., 2016].	23
3.3. Modelo de densidad transversal de gas (línea roja) y polvo (línea azul) del disco de transición [van der Marel et al., 2015].	24
3.4. Vista esquemática de la inclinación de los planos orbitales de los anillos en el disco de transición HD 142527 [Marino et al., 2015]. . . .	25

3.5. Observación de ALMA de la emisión de gas (izquierda) y polvo (derecha) de los discos que rodean a DoAr44 [van der Marel et al., 2016].	26
3.6. Gráfica de la función densidad Gamma para $\alpha = 1, 5, 10$ y $\lambda = 0, 5$. . .	27
3.7. Eventos e histograma de frecuencias de un patrón regular (izquierdo), agregado (centro) y aleatorio (derecho) en un cuadrado unidad. . . .	29
3.8. Partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio formando anillos concéntricos.	30
3.9. Distribución radial de partículas, $R_n(r)$, para $n = 1, 2, 3$ y $r_n = 1, 4, 9$, respectivamente.	31
3.10. Representación gráfica de $ Y_m^l(\theta, \phi) ^2 \sin \theta$. Armónicos esféricos que generan la función para la distribución de partículas que va a formar anillos.	32
3.11. Función densidad $S_n(r)$ para $a_s = 1$ y $n = 1, 2, 3$	33
3.12. Distribución de partículas radial $R_n(r)$ y angular $Y_n(\theta, \phi)$ para el disco de transición DoAr44.	34
3.13. Estructura del disco protoplanetario Hl-Tauri. Este está conformado por una serie de bandas brillantes compuestas de polvo y bandas oscuras (gaps) donde se presume la formación planetaria [ALMA Partnership et al., 2015].	36
3.14. El brillo observado en cada banda y los perfiles de los índices espectrales medidos a lo largo del eje mayor del disco (Tomada de Pinte et al., 2016).	37
3.15. Función de distribución radial $R_n(r)$ de Hl-Tauri y la vista de un corte transversal y cenital del disco protoplanetario.	39
4.1. Función de distribución $R_n(r)Y_n(\theta, \phi)$ de DoAr44 y su representación como un sistema de partículas.	42
4.2. Función de distribución $R_n(r)$ de Hl-Tauri y su representación como un sistema de partículas.	43
4.3. Rotación alrededor del eje x.	44
5.1. Bondad de ajuste máximo para cada diámetro del objeto (km). . . .	46
5.2. Radio orbital de los planetas del Sistema Solar: teórico a_t (línea continua) y observado a_o (círculos).	48
5.3. Energía de los planetas del Sistema Solar: teórica E_t (línea continua), observada E_o (círculos grises) y corregida E_c (círculos negros). . . .	49
5.4. Momentum angular orbital de los planetas del Sistema Solar: teórico L_t/m (línea continua), observado L_o/m (círculos grises) y corregido L_c/m (círculos negros).	50
5.5. Bondad de ajuste máxima con respecto al parámetro a_s	51
5.6. Radio orbital de los satélites del Sistema Solar: teórico a_t (línea continua) y observado a_o (círculos).	53

6.1. Disco protoplanetario alrededor de la estrella HL-Tau, la imagen muestra varios anillos concéntricos de gas y polvo emitiendo radiación los cuales están separados por un gap (zona oscura) (Figura tomada de ALMA Partnership et al. 2015).	55
6.2. (a) Distribución radial y (b) cenital de masa [Poveda T. et al., 2015].	57
6.3. Imágen proyectada del disco protoplanetario	58
6.4. Perfil normalizado luminosidad - distancia.	58
6.5. Perfil de densidad de materia con respecto a la distancia, donde se ha suprimido el efecto de la luminosidad de la estrella.	59
6.6. Órbitas y radio de Hill de los objetos obtenidos del proceso de acreción simulado computacionalmente.	59

Índice de tablas

3.1. Parámetros del disco de transición DoAr44	27
3.2. Datos sobre las bandas brillantes de HL-Tauri ALMA Partnership et al. [2015].	38
4.1. Valores de n y a obtenidos HL-Tauri	41
5.1. Radio orbital observado a_o (NASA JPL Small-Body Database) y teórico calculado a_t	47
5.2. Radio (a_o , a_t), excentricidad (ϵ_t) e inclinación orbital (θ_t)	52

Introducción

Los sistemas planetarios tienen su origen en el colapso gravitacional de una nube de gas y polvo. Mediante un proceso de acreción puede formarse una estrella y como un remanente del proceso de formación de la estrella, un disco de planetesimales a su alrededor llamado disco circunestelar. Las recientes observaciones muestran que por lo general se forman dos estrellas, la formación de una o más de dos estrellas es un caso particular. Cuando el disco circunestelar da origen a planetas, recibe el nombre de disco protoplanetario. La investigación de los discos protoplanetarios es esencial para conocer las etapas de evolución que conducen a la formación de los exoplanetas y planetas del Sistema Solar.

Las imágenes de alta resolución de H_I-tauri, obtenidas por ALMA (Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array) [ALMA Partnership et al., 2015] y VLA (Very Large Array) [Carrasco-González et al., 2016], han revolucionado y cuestionado las teorías de formación planetaria, siendo este tema de gran interés y controversia en la actualidad. Una clase de disco circunestelar particular son los discos de transición, los cuales, por lo general son simétricos y tienen forma de toroide alrededor de su estrella [Andrews et al., 2011, Bruderer, 2013]. El disco de transición DoAr44 es el disco protoplanetario más sencillo y simplificado que se puede estudiar y modelar. Este modelo es la base para describir discos protoplanetarios más complejos como H_I-Tauri [ALMA Partnership et al., 2015].

Un disco de transición puede estar formado por uno o más toroides y eventualmente los toroides pueden tener grados de inclinación diferentes [Marino et al., 2015]. Mediante un proceso de acreción, este toroide de polvo y gas forma planetesimales, los cuales al colapsar, dan origen eventualmente a un objeto masivo (planeta o planeta enano) y una serie de objetos menores (asteroides y cometas). Por consiguiente, la formación planetaria debe darse en el interior del toroide [Carrasco-González et al., 2016]. En consecuencia, la formación planetaria es más rápida, dando una explicación a la gran cantidad de exoplanetas que se han encontrado actualmente alrededor de las estrellas. Un disco protoplanetario está compuesto por una serie de toroides concéntricos de gas y polvo.

En este trabajo se plantea un modelo estadístico para describir la distribución de materia (gas y polvo) en un disco protoplanetario. Se determinan los parámetros para describir el Sistema Solar y se encuentra que los sistemas planetarios (sol-planetas,

planeta-satélites, estrella-exoplanetas, pulsar-exoplanetas) no se forman en cualquier lugar sino en ciertos sitios determinados por un número de órbita, n , el cual, a su vez depende de la masa de la estrella en formación. El radio orbital, la excentricidad, inclinación orbital, momentum angular y energía están determinados por el número de órbita. Mediante la bondad de ajuste (chi-cuadrado), se muestra que existe una buena concordancia entre los datos observados y la descripción física asociada al modelo. Se describe el proceso seguido para simular los discos de transición con un solo toroide como DoAr44 y el disco protoplanetario HL-Tauri, formado por varios toroides concéntricos.

En el capítulo 1 se hace una breve introducción a los discos protoplanetarios. En el capítulo 2 se hace una revisión de la dinámica orbital de los planetesimales y planetas con el formalismo de la mecánica clásica. En el capítulo 3 se construye el modelo estadístico basado en el disco de transición DoAr44 y en el disco protoplanetario HL-Tauri. El capítulo 4 describe el proceso seguido para la simulación computacional de los discos de transición y protoplanetarios. En el capítulo 5 se aplica el formalismo al Sistema Solar y en el capítulo 6 se aplica al disco protoplanetario HL-Tauri. Adicionalmente, en los anexos se demuestra el cálculo de la esperanza y varianza de la distribución Gamma y la relación entre la distribución de Poisson y la distribución Erlang.

Capítulo 1

Disco protoplanetario

1.1. Colapso de la nube protoplanetaria

El colapso gravitacional de una nube molecular de $\sim 100 - 200$ pcda origen a una o más estrellas y a un disco circunestelar, constituido por gas y polvo [Williams and Cieza, 2011]. Si eventualmente se da la formación planetaria, recibe el nombre de disco protoplanetario. Por ejemplo, en la nube molecular LD1551 (ver Figura 1.1) localizada en la constelación de Tauro, se evidencia la formación de estrellas con un sistema planetario a su alrededor, tal como el sistema HL-Tauri ALMA Partnership et al. [2015]. El medio interestelar tiene una temperatura inferior a los 100 K y una densidad aproximada de $10\text{ partículas/cm}^3$. La nebulosa está compuesta el 92 % de Hidrógeno (H), 7 % Helio (He) y 1 % de otros elementos (polvo), con una temperatura del orden 10^3 K y una densidad aproximada de $0,1 - 10\text{ partículas/cm}^3$, existen regiones calientes de baja densidad con densidades por debajo de $0,01\text{ partículas/cm}^{-3}$ y temperaturas superiores a 10^5 K [Cox, 2005].

La formación de estrellas se produce predominantemente en regiones del medio interestelar donde se puede formar hidrógeno molecular. Las nubes moleculares tienden a aparecer cerca del plano galáctico y en los brazos espirales de las galaxias, que se han demostrado mediante observaciones recientes sobre la distribución del gas CO (Monóxido de Carbono) en La Vía Láctea [Dame et al., 2001]. Las nubes moleculares también se han identificado y catalogado de observaciones de CO de La Vía Láctea [Rice et al., 2016]. En la Figura 1.2 se muestra la distribución del gas CO a lo largo del plano galáctico, se puede observar la concentración de CO aumenta a medida que nos acercamos al centro de la galaxia. En las galaxias espirales se observa que las nubes moleculares trazan los brazos espirales y los discos galácticos [Kuno et al., 2007].

La nube molecular se encuentra en un estado estacionario, un evento tal como la explosión de una supernova da inicio al colapso gravitacional haciendo que la presión, la temperatura y el momentum angular de la nebulosa aumente. Finalmente, el colapso de la nube se detiene cuando la estrella inicia las reacciones termonucleares de fusión. El disco circunestelar es una consecuencia natural de la formación estelar y está constituido por gas, polvo el cual se condensa en objetos rocosos o hielo llamados planetesimales. La mayor parte del material es capturado por la estrella o expulsado

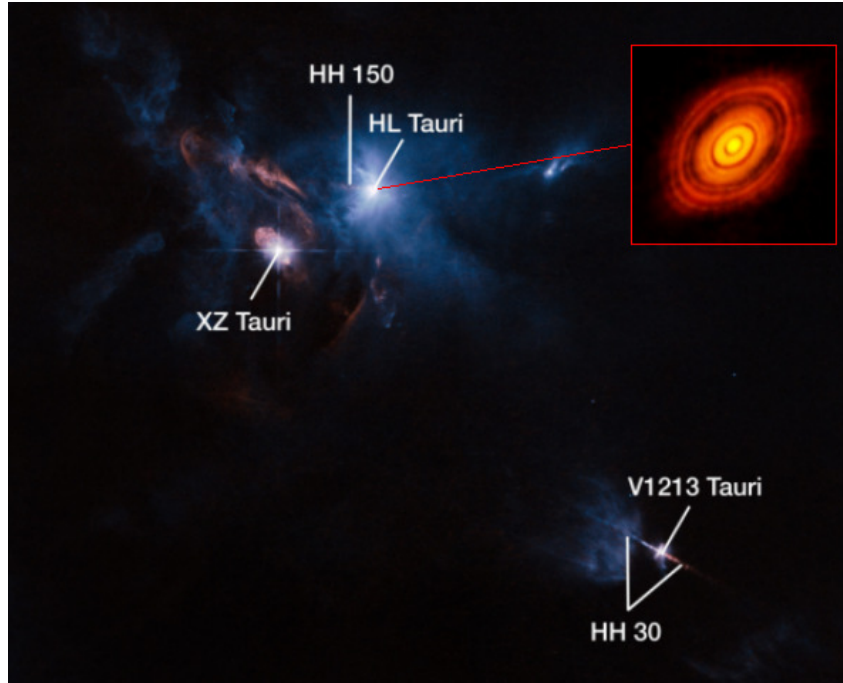


Figura 1.1: Nube molecular interestelar de polvo y gas denominada LD1551 ubicada en la constelación de Tauro muestra la formación de varias estrellas con sistemas circunestelares a su alrededor, por ejemplo, el sistema planetario HL-Tauri. (Imagen cortesía Telescopio Espacial Hubble)

por el viento estelar; pero los planetesimales mediante el proceso de acreción, pueden generar un sistema planetario, formando planetas, satélites, cometas, asteroides y otros cuerpos menores.

Durante el colapso gravitacional intervienen las siguientes fuerzas: La fuerza de gravedad tiende a concentrar la masa de la nube en su centro dando origen a la protoestrella. La protoestrella está formada por la acumulación de gas muy denso y caliente, emite radiación infrarroja debido a su alta temperatura, pero no genera luz visible porque no ha iniciado las reacciones termonucleares típicas de una estrella. Es por esta razón, las protoestrellas únicamente pueden verse a través de telescopios que captan luz en el infrarrojo (si se utiliza un telescopio óptico solo se observa una mancha negra). La temperatura del gas genera una presión hacia afuera para contrarrestar la fuerza de gravedad y finalmente, la rotación de la nube hace que el momento angular ejerza una fuerza sobre el gas que también se opone a la fuerza de gravedad dando origen al disco protoplanetario.

En primera aproximación podemos considerar la nube como un gas ideal, donde la energía térmica promedio está dada por: $E_{term} = \frac{3}{2}Mc_0^2$, donde M es a la masa de la nube colapsando y c_0 la velocidad del sonido. La energía rotacional por $E_{rot} = \frac{1}{5}MR^2\omega^2$, donde R es el radio aproximado de la nube y ω la velocidad angular

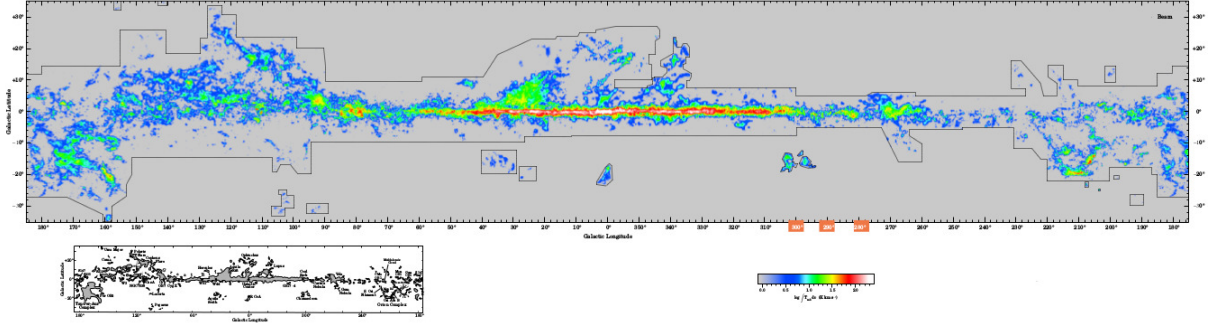


Figura 1.2: Un mapa espacial del gas CO en La Vía Láctea, la concentración de CO aumenta a medida que nos acercamos al centro de la galaxia [Kuno et al., 2007].

de rotación. La energía potencial gravitacional: $E_{grav} = -\frac{3}{5}GM^2/R$. Si la nube se encuentra en equilibrio termodinámico, se cumple el teorema del virial, donde: $E_{cinética} = E_{term} + E_{rot} = -\frac{1}{2}E_{pot}$. De tal manera que,

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \quad (1.1)$$

donde $\alpha = E_{term} / |E_{pot}|$ y $\beta = E_{rot} / |E_{pot}|$. Si la energía cinética es mayor que la energía potencial, la nube se expande partículas pueden escapar de la nube por efecto de su rapidez ($\alpha + \beta > \frac{1}{2}$). Si la energía cinética es menor que la energía potencial, el colapso gravitacional hacia el centro de la nube sería inminente y no daría tiempo a la nube de fragmentarse ($\alpha + \beta < \frac{1}{2}$). Este es un modelo muy simplificado para entender el colapso gravitacional de la nube protoplanetaria [Arreaga-García et al., 2014].

1.2. Evolución del disco protoplanetario

El nacimiento de la estrella permite que se forme el disco protoplanetario, el cual a vez da origen a los planetas y cuerpos menores cuya composición material dependerá de las propiedades del disco [Beckwith et al., 1989, Strom et al., 1989]. Los discos protoplanetarios pueden detectarse mediante varias técnicas, cada una permite determinar características específicas, temperaturas y/o regiones del disco y nos permite investigar los procesos físicos que se están ocurriendo [Armitage, 2011].

Los telescopios ópticos (como Hubble, Spitzer y Kepler) nos permiten observar el gas que rodea a los discos protoplanetarios, los cuales a su vez no nos permite observar el disco (www.jpl.nasa.gov). Pero, los radiotelescopios nos permiten detectar el polvo que re-irradia la irradiación estelar en el infrarrojo (IR) ALMA Partnership et al. [2015]. Esto permite observar el disco a través del gas, porque a mayor longitud de onda, el flujo de emisión IR del disco es mayor que el flujo del espectro visible. Las diferentes longitudes de onda IR corresponden a diferentes

temperaturas y por lo tanto diferentes regiones en el disco. De hecho, este exceso de IR fue la primera evidencia observacional de discos alrededor de estrellas jóvenes [Strom et al., 1989, Beckwith et al., 1989]. La geometría del disco y la correspondiente Distribución Espectral de Energía (DEE) se muestran esquemáticamente en la Figura 1.3 adaptación [Dullemond et al., 2007], donde se muestra que la emisión del infrarrojo cercano y medio (longitud de onda más corta) proviene de las regiones internas más calientes del disco (radios pequeños). La emisión del infrarrojo lejano (longitud de onda más larga) proviene de la masa de polvo en las regiones externas del disco, las cuales son ópticamente delgadas y la emisión submilimétrica que proviene principalmente del plano medio del disco externo.

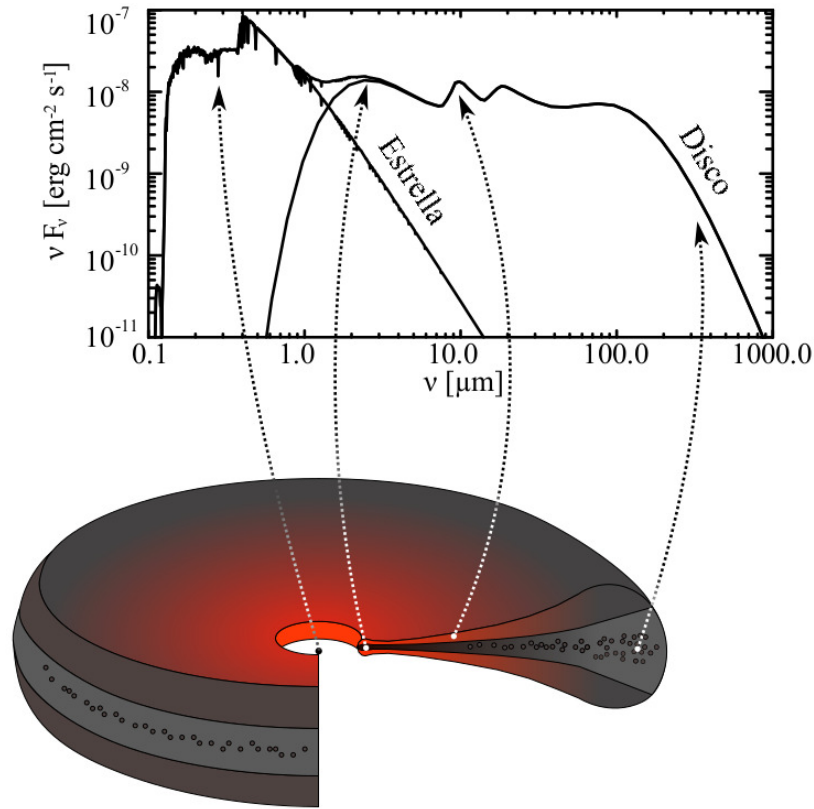


Figura 1.3: Ejemplo de distribución espectral de la energía en un disco protoplanetario, es decir, la emisión térmica observable a lo largo del disco (adaptación de Dullemond et al. 2007).

Los procesos de evolución en los discos circunestelares varían dependiendo de tipo de estrella [Armitage, 2011] y comparten características similares como: procesos de acreción viscosa, asentamiento de polvo, fotoevaporación y otros. Entre los tipos de estrellas más estudiados se encuentran las estrellas T-Tauri y las Herbig Ae/Be, las cuales están envueltas en nubes de gas y polvo y pueden estar rodeadas de un disco circunestelar [Perez and Grady, 1997].

Las T-Tauri son estrellas visibles en el rango de color blanco-amarillo hasta naranja (tipo espectral F, G, K, M) y con una masa inferior a dos masas solares. Al tener un radio mayor su luminosidad es significativamente más alta, pero su temperatura superficial es demasiado baja para iniciar reacciones nucleares, esto hace que la estrella se contraiga liberando energía gravitacional para dar origen a una estrella de la secuencia principal, este proceso toma entre 10 y 100 millones de años. La contracción hace que el momentum angular aumente de tal manera que estas estrellas tienen períodos de rotación cortos (alrededor de doce días) comparados con el Sol (alrededor de un mes). Las estrellas T-Tauri son muy activas y variables [Perez and Grady, 1997].

Las estrellas Herbig Ae/Be, son estrellas jóvenes visibles de color blanco y azulado (tipo espectral A y B) y con una masa entre 2 y 8 M_{\odot} . Estas estrellas aún no han iniciado la fusión de H en su núcleo, ya que se encuentran en la fase de formación estelar, contrayéndose y aproximándose a la secuencia principal. En ocasiones, las estrellas Herbig Ae/Be muestran cambios significativos en su brillo, se piensa que se debe a la existencia de protoplanetas o planetesimales en el disco circunestelar [Perez and Grady, 1997].

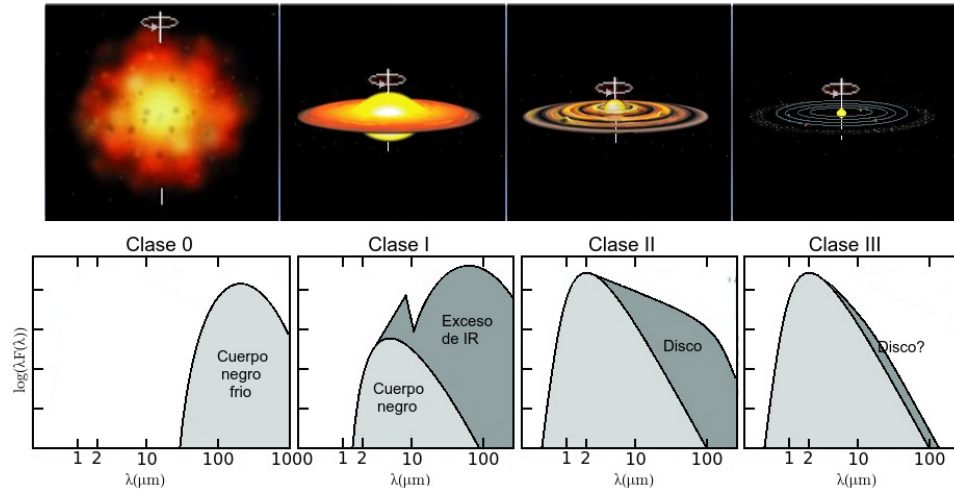


Figura 1.4: Etapas de formación de un sistema planetario y clasificación del origen de la distribución espectral de energía. (adaptación de Dullemond et al. 2007).

Los discos protoplanetarios pueden clasificarse observacionalmente según la forma de su DDE, es decir, el flujo de radiación IR. Es importante aclarar que es la emisión del polvo la que se mide y no la del gas. Cuantificando el exceso en el IR la clasificación resulta en (ver Figura 1.4 adaptación de Dullemond et al. 2007):

- Clase 0: La DEE posee un pico en $\sim 100 \mu\text{m}$, existe gran cantidad de polvo y predomina el IR lejano. Toda la emisión es similar a un cuerpo negro frío (la temperatura es de $\sim 10 \text{ K}$) proviene de una nebulosa de polvo y gas de

~ 10.000 ua. En esta fase predomina el proceso de acreción que da origen a la protoestrella. La masa que rodea a la estrella es de $\gtrsim 0,5 M_{\odot}$. La edad del objeto es de $\sim 10^4$ años[Dullemond et al., 2007].

- Clase I: La DEE es más plana, menos pronunciada, hay menos cantidad de polvo y predomina el IR medio. Se ha formado un disco de acreción ($\sim 0,1 M_{\odot}$) en torno a una protoestrella central y existe evidencia de flujos bipolares. En el descenso que se encuentra a unos $\sim 10 \mu m$ nos dice que hay silicatos (similar a la arena de playa) en el polvo alrededor de la estrella. La edad del objeto es de $\sim 10^5$ años. En el caso del Sol, se estima que su etapa de protoestrella duró de cien mil a un millón de años[Dullemond et al., 2007].
- Clase II: Poseen una DEE en descenso. Estos objetos se llaman “Estrellas T-Tauri Clásicas”. Se tiene un sistema, con una estrella central en torno a la cual rota un disco de gas y polvo visible que ha disipado la nube molecular que lo envolvía. La mayor parte de la energía viene del objeto central (cuerpo negro caliente), pero todavía hay emisión del disco, más de lo que cabría esperar de un cuerpo negro. La masa de disco ahora es $\sim 0,01 M_{\odot}$. La edad del objeto es de $\sim 10^6$ años[Dullemond et al., 2007].
- Clase III: Son estrellas de pre-secuencia principal con muy poco o ningún exceso en el IR. Son las estrellas T-Tauri con líneas espectrales Balmer de H débiles y metales ionizados. La estrella central ha evolucionado hacia un estado previo a la etapa de secuencia principal. El gas del disco ha desaparecido casi por completo, quedando constituido, principalmente, por un gran número de escombros $< 1 km$. La masa de disco ahora es $\sim 0,03 M_{\odot}$. Estos discos tienen radios entre $(10 - 100$ ua). La edad del objeto es de $\sim 10^7$ años[Dullemond et al., 2007].

1.3. Formación del Sistema Solar

El origen del Sistema Solar es uno de los problemas fundamentales de la astrofísica y es el sistema con mayor información obtenida. La simulación computacional es el mejor medio para estudiar y poner a prueba los diversos modelos teóricos. Todo esto complementado con las observaciones astrofísicas limitadas de las regiones de formación de estrellas, discos circunstelares y datos de otros sistemas planetarios alrededor de las estrellas y pulsares [Wolszczan and Frail, 1992, Banit et al., 1993].

Una teoría completa del origen de los sistemas planetarios debe explicar los siguientes hechos observados [Lissauer, 1993]:

1. Inclinación orbital: Si la estrella se forma por acreción del disco o si el disco es un remanente de la formación de la estrella, por conservación del momentum

angular, el disco y la estrella deben tener la misma inclinación orbital. En el Sistema Solar, las órbitas de los principales planetas, así como los de la mayoría de los objetos menores (planetas enanos y asteroides) son casi coplanares (plano de la eclíptica), y este plano orbital está cerca del ecuador del Sol (entre el plano de la eclíptica y el Sol existe un ángulo de siete grados). Pero en otros sistemas planetarios, prácticamente la totalidad de los exoplanetas presentan una inclinación orbital entre 80 y casi 90 grados y se encuentran a menos de una unidad astronómica, como se muestra en la Figura 1.5 [Akeson et al., 2013].

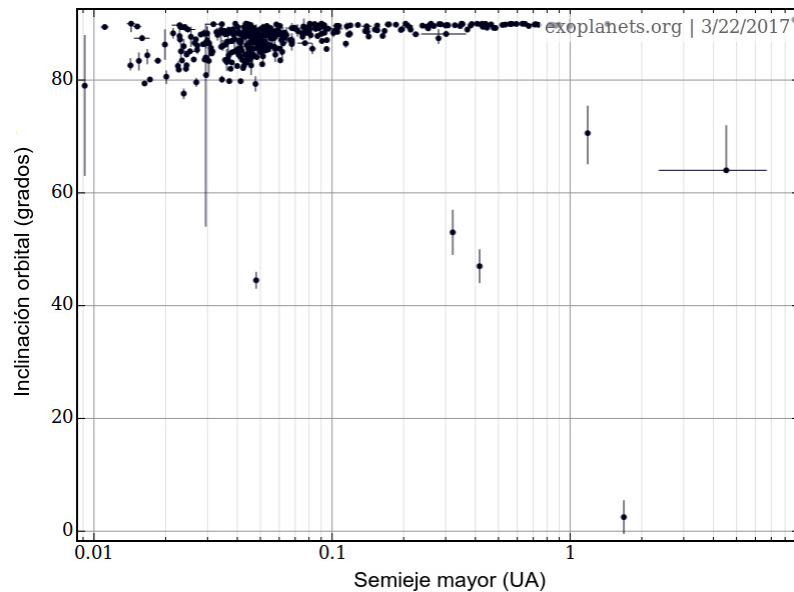


Figura 1.5: Inclinación orbital de los exoplanetas encontrados alrededor de las estrellas [Akeson et al., 2013].

2. Órbitas retrógradas. Se espera que los planetas que se forman a partir del disco orbiten más o menos en el mismo plano y en la misma dirección que su estrella. Varios exoplanetas (más de seis) tienen órbitas retrógradas, es decir, orbitan en dirección contraria al sentido de rotación de su estrella.
3. Espaciamiento orbital: Los principales planetas están confinados a distancias heliocéntricas de $\lesssim 30$ ua, y la separación entre sus órbitas aumenta con la distancia desde el Sol. Las trayectorias orbitales de los ocho planetas principales no se cruzan, ni siquiera se acercan estrechamente. Plutón, cuya órbita cruza la de Neptuno, está protegido de encuentros cercanos con este cuerpo masivo por una resonancia orbital 3:2. Aparte del cinturón de asteroides entre 2,1 y 4 ua y las regiones cercanas a Júpiter, el espacio interplanetario contiene muy pocos escombros. Sin embargo, la mayoría de las órbitas con estas regiones vacías son inestables a las perturbaciones de los planetas en

escalas de tiempo cortas comparadas con la edad del Sistema Solar. Así, en cierto sentido, los planetas están tan cerca como pueden estar. Sin embargo, los planetas menos masivos podrían estar en órbitas más apretadas.

4. Rotación planetaria: Seis de los ocho planetas principales de nuestro Sistema Solar giran alrededor de su eje en la misma dirección que tienen alrededor del Sol, y tienen inclinaciones axiales de $< 30^\circ$; Sin embargo, Venus, Urano (y Plutón) giran en la dirección retrógrada.
5. Distribución del Momento angular: Debido al proceso de acreción que conduce a la formación de la estrella y considerando que el momentum angular se conserva, la estrella debe adquirir cerca al 99 % del momentum angular. Las observaciones muestran que las estrellas tienen menos del 1 % del momentum angular de todo sistema. En el Sistema Solar, más del 98 % del momento angular está contenido en los movimientos orbitales de los planetas jovianos. Esto ha conducido a plantear diversas formas de transferencia de momentum angular de la estrella al disco. Por el contrario, los momentos angulares orbitales de los sistemas de satélites de los planetas gigantes son mucho menores que los momentos angulares de rotación de los planetas.
6. Edades: Según la datación por radioisótopos realizada a meteoritos primitivos, estos indican edades de $4,56 \pm 0,02 \times 10^9$ años. Estas son las rocas más antiguas conocidas y sus edades se asume son las mismas del Sistema Solar. La mayoría de los meteoritos datados tienen de $4,4 - 4,56 \times 10^9$ años, las rocas lunares tienen edades de $3,1 - 4,4 \times 10^9$ años y las rocas terrestres son $\leq 4,1 \times 10^9$ años de edad.
7. La estructura mineral y cristalina: Muchos meteoritos primitivos presentan eventos rápidos de calentamiento y enfriamiento. La evidencia de campos magnéticos (locales) de orden de un Gauss, durante la época de formación del planeta también está presente.
8. Composiciones: Los planetas terrestres, que orbitan más cerca del Sol, están compuestos principalmente de material rocoso denso y refractario (alta temperatura de condensación). Las densidades bajas de los planetas más grandes, Júpiter y Saturno, implican que el H y el He son los componentes dominantes, sin embargo estos planetas están todavía enriquecidos con elementos de Z más altos (más pesados que el He). Júpiter tiene el 90 % de masa en H y He y Saturno el 77 %. Orbitando más lejos del Sol, Urano y Neptuno tienen una densidad intermedia no comprimida, implicando composiciones dominadas por un material de Z alto, con $\sim 5 - 20$ % de H y He (Las abundancias de H y He en estos planetas son difíciles de estimar, no se sabe con exactitud si el material más pesado es principalmente roca muy densa o "hielos" fundidos de densidad más baja: Agua H_2O , Amoniaco NH_3 y Metano CH_4). Las lunas de los planetas exteriores consisten en roca y hielo en

proporciones variables. Los asteroides son rocosos, pero sus bajas densidades, en relación con los planetas terrestres, sugiere un componente más ligero, tal vez silicatos hidratados. El cometa Halley consiste en una mezcla de hielo, roca y partículas orgánicas: Carbono, Hidrógeno, Nitrógeno y Oxígeno (*CHON*). Aparte de los elementos extremadamente volátiles como el H, N y gases nobles, la abundancia de elementos del Halley parece ser casi solar.

9. Masas planetarias: En conjunto los planetas representan menos del 0,2 % de la masa del Sistema Solar. Los más alejados son los planetas más masivos, Júpiter y Saturno, seguidos por los planetas exteriores Neptuno y Urano. Los planetas relativamente más pequeños denominados rocosos orbitan más cerca del Sol. Entre los planetas rocosos y jovianos orbitan varios planetas enanos y asteroides. La masa total del cinturón de asteroides es sólo el 1 % de la de Mercurio, el planeta rocoso más pequeño.
10. Cinturón de asteroides: Aproximadamente 3×10^{24} g de material se distribuye entre innumerables asteroides y planetas enanos orbitando entre Marte y Júpiter. La distribución de tamaño de los asteroides sigue aproximadamente la ley de potencias con un índice de tamaño incremental entre $-2,5$ y $-3,0$ el cual tiene una pendiente similar a la esperada de la teoría apropiadamente ajustada y estudios experimentales de fragmentación. La excentricidad y las inclinaciones de las órbitas asteroidales son aproximadamente distribuciones de Rayleigh, con medias de $0,14$ y 15° , respectivamente. Estos parámetros orbitales corresponden a velocidades aleatorias de $\sim 5 \text{ km/s}$, sobre la velocidad de escape de $1,7 \text{ km/s}$ desde Ceres, el asteroide más grande.
11. Sistemas de satélite: La mayoría de los planetas, incluyendo todos los planetas gigantes, tienen satélites naturales. La mayoría de los satélites planetarios cercanos se desplazan en órbitas de baja inclinación y baja excentricidad. Las pequeñas lunas distantes tienden a tener grandes inclinaciones y excentricidades.
12. Asteroides y meteoritos: Una variedad de espectros, mineralógicos y la evidencia dinámica implica que casi todos los meteoritos vienen del cinturón de asteroides. El registro de meteoritos muestra evidencia de una población diversa de asteroides, con algunos planetas enanos que se han derretido y otros que permanecen en un estado más primitivo.
13. Composición isotópica: Aunque las abundancias de elementos varían sustancialmente entre los cuerpos del Sistema Solar, las proporciones isotópicas son notablemente uniformes. Esto es cierto incluso para muestras de meteoritos muy pequeñas. La mayoría de las variaciones isotópicas pueden explicarse como resultado del fraccionamiento en masa (causado, por ejemplo, por diferencias en la eficacia del enlace químico o por escape atmosférico diferencial), o como productos del decaimiento radiactivo. Sin embargo, pequeñas variaciones

en la relación isotópica de oxígeno y unos pocos oligoelementos en algunos meteoritos primitivos implican que la nebulosa protoplanetaria no estaba completamente mezclada a nivel molecular.

14. Registro de cráteres: La mayoría de las superficies sólidas planetarias y satélites presentan cráteres. A las tasas de impacto actuales, se requeriría mucho más tiempo que la edad del Sistema Solar para crear una alta densidad de cráteres. Por lo tanto, la tasa de impacto debe haber sido mucho mayor en una época anterior. Las edades radiométricas de las brechas lunares y los derretimientos de impacto implican que las tasas de craterización fueron mucho mayores durante los primeros 8×10^8 años de la historia del Sistema Solar que en la actualidad.
15. Cometas: Aproximadamente 10^{12} cometas de radio $R > 1 \text{ km}$ orbitan al Sol a distancias más allá de 10^4 ua ; Este enjambre, denominado nube de Oort, está isotrópicamente distribuido con respecto al Sol, aparte de las asimetrías producidas por el campo de mareas de la Galaxia. Más cerca del Sol, hay evidencia de un segundo reservorio de cometas, el Cinturón de Kuiper, un disco aplanado a distancias heliocéntricas de 40 ua .

Capítulo 2

Dinámica orbital

Los sistemas planetarios (Sol - planetas, planeta-satélites, estrella-exoplanetas) tienen su origen en el colapso gravitacional de una nube de gas y polvo (nube protoplanetaria) [Lissauer, 1993]. Para el caso del sistema planetario, pulsar-exoplanetas, de los remanentes del colapso gravitacional de una estrella supergigante [Banit et al., 1993]. Mediante un proceso de acreción se forma una estrella masiva y un disco de planetesimales que orbitan la estrella (de masas muy pequeñas), los cuales a su vez dan origen a planetas rocosos o gigantes [Boss, 2001a,b]. En lo que sigue se desarrollará el formalismo que describe el movimiento del planetesimal alrededor de la estrella, desde el punto de vista de la mecánica clásica.

2.1. Órbitas de los planetesimales

Consideremos un cuerpo de gran masa (M_s) en un punto fijo (centro de fuerzas) y otro cuerpo de masa pequeña ($m \ll M_s$), moviéndose a una distancia r bajo la fuerza de atracción gravitacional. El Lagrangiano del sistema, tomado en coordenadas polares (r, θ) en el plano del movimiento y con el origen en el punto fijo, está dado por¹:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GM_s m}{r}, \quad (2.1)$$

como en este Lagrangiano no aparece explícitamente el tiempo la energía mecánica total se conserva, $E \equiv \text{constante}$. La solución de la primera ecuación de movimiento es trivial,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \quad \text{entonces,} \quad \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0;$$

como la coordenada θ es cíclica, tiene asociada una cantidad conservada, que debe ser evaluada a partir de las condiciones iniciales; el momentum angular orbital, $L = mr^2\dot{\theta} \equiv \text{constante}$. La segunda ecuación de movimiento

¹Nótese que tenemos una ecuación paramétrica, donde el parámetro es el tiempo t : $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \implies m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{GM_s m}{r^2} = 0.$$

Hacemos el siguiente cambio de variable, $r = 1/u$, donde $u = u(r)$

$$\dot{r} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}, \quad \ddot{r} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2},$$

la ecuación de movimiento toma la forma,

$$-\frac{L^2}{mr^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] + \frac{GM_s m}{r^2} = 0;$$

que es la ecuación diferencial de la órbita. Para que la ecuación se cumpla, el término dentro del paréntesis debe ser:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM_s m}{L^2}.$$

Haciendo el cambio de variable $w = w(r)$, $w = 1/r - GM_s m/L^2$, obtenemos:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = 0,$$

cuya solución inmediata es $w = A_o \cos(\theta - \theta_o)$, siendo A_o y θ_o constantes de integración, las cuales dependen de las condiciones iniciales, como

$$\frac{1}{r} = A_o \cos \theta + \frac{GM_s m^2}{L^2},$$

se ha hecho, $\theta_o = 0$, por simplicidad. Haciendo, $\alpha = L^2/GM_s m^2$ y $\epsilon = A_o L^2/GM_s m^2 = A_o \alpha$, obtenemos la ecuación de una cónica:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

en la Figura 2.1 podemos observar las diferentes trayectorias, $r = r(\theta)$, que se forman para diferentes valores de la excentricidad ϵ ; para $\epsilon = 0$ tenemos una circunferencia, $\epsilon < 1$ una elipse, $\epsilon = 1$ parábola y $\epsilon > 1$ hipérbola [Goldstein, 1994].

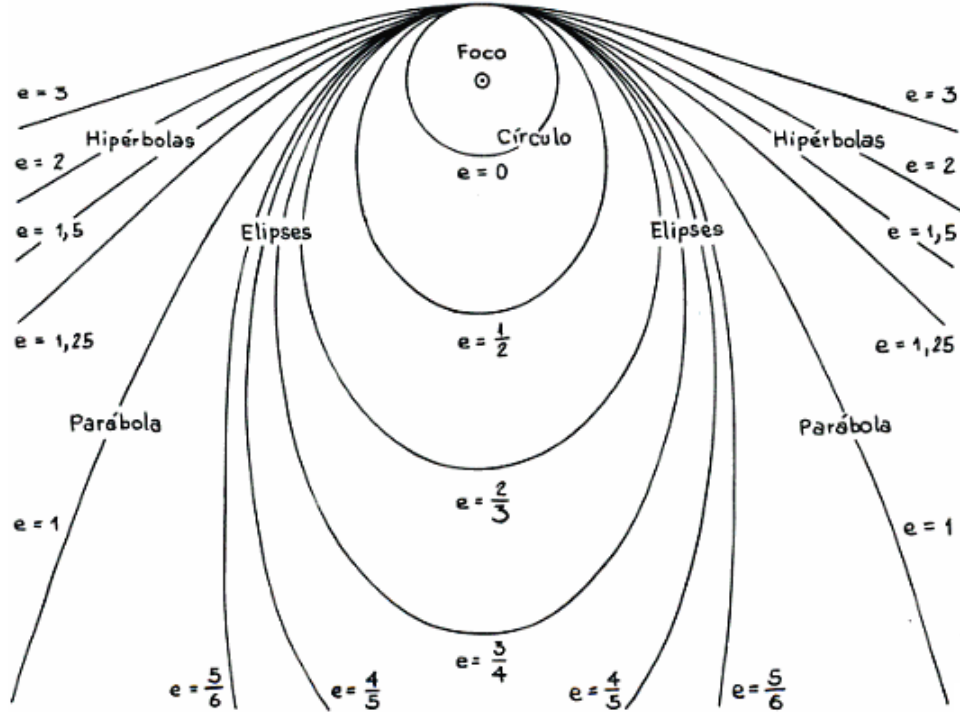


Figura 2.1: Trayectorias posibles dependiendo de la excentricidad [Goldstein, 1994].

Tenemos trayectorias circulares ($\epsilon = 0$) o elípticas ($\epsilon < 1$) para los planetesimales ligados a la estrella, hiperbólicas ($\epsilon > 1$) para los planetesimales que se acercan a la estrella desde una distancia muy grande y luego la abandonan para siempre, y parabólica ($\epsilon = 1$) para el caso límite entre las trayectorias elíptica e hiperbólica. Nos interesa el caso donde el planetesimal se encuentra ligado a la estrella, por lo cual debemos imponer la condición, $0 \leq \epsilon < 1$, necesariamente debe ser $\alpha = a(1 - \epsilon^2)$, el cual recibe el nombre de semilatus rectum, por consiguiente,

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (2.2)$$

y

$$\frac{L}{m} = \sqrt{GM_s a(1 - \epsilon^2)}. \quad (2.3)$$

Deseamos ahora relacionar los parámetros α y A_o con las constantes de movimiento E y L . Como en los puntos absidales de la trayectoria (pericentro y apocentro), la energía cinética radial es nula, podemos escribir,

$$E = \frac{L^2}{2mr_{\text{mín}}^2} - \frac{GM_s m}{r_{\text{mín}}} = \frac{L^2}{2mr_{\text{máx}}^2} - \frac{GM_s m}{r_{\text{mín}}}$$

donde $r_{\text{mín}} = a(1 - \epsilon^2)/(1 + \epsilon)$ y $r_{\text{máx}} = a(1 - \epsilon^2)/(1 - \epsilon)$. Sustituyendo el valor de $r_{\text{mín}}$ (o $r_{\text{máx}}$), obtenemos,

$$L = \frac{G^2 M_s^2 m^3}{2L^2} (\epsilon^2 - 1) \quad (2.4)$$

sustituyendo L , ecuación (2.3),

$$\frac{E}{m} = -\frac{GM_s}{2a} \quad (2.5)$$

nótese que la energía mecánica total no depende de la excentricidad de la órbita. Despejando ϵ en la ecuación (2.4), obtenemos la excentricidad,

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M_s^2 m^3}}; \quad (2.6)$$

la excentricidad depende de la energía mecánica total, E , para tener una circunferencia o una elipse la energía debe ser negativa, $E < 0$; para una parábola la energía necesariamente debe ser cero, $E = 0$ y para una hipérbola la energía debe ser positiva, $E > 0$.

2.1.1. Distancia media y media temporal de la distancia

El valor medio \bar{r} de la distancia de un planetesimal que sigue una trayectoria elíptica, es el promedio entre la mínima distancia estrella-planetesimal (perigeo), $r_{\text{mín}} = a(1 - \epsilon^2)/(1 + \epsilon)$, y la máxima distancia (apogeo), $r_{\text{máx}} = a(1 - \epsilon^2)/(1 - \epsilon)$:

$$\bar{r} = \frac{1}{2} [r_{\text{mín}} + r_{\text{máx}}] = a \quad (2.7)$$

El valor medio \bar{r} no coincide con la media temporal² $\langle r \rangle$ de la distancia, a lo largo del movimiento:

$$\langle r \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau r(t) dt.$$

Partiendo de la ecuación de Kepler, $\omega t = \psi - \epsilon \sin \psi$, diferenciando, $\omega dt = (1 - \epsilon \cos \psi) d\psi$; y la ecuación $r(t) = a(1 - \epsilon \cos \psi)$ y que $\omega\tau = 2\pi$:

$$\langle r \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_0^\tau (1 - \epsilon \cos \psi)^2 d\psi = a \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} \right). \quad (2.8)$$

2.1.2. Órbitas de los planetas

Si un planeta tiene una masa bastante grande comparada con la masa de la estrella, $m \sim M_s$, orbitan mutuamente el centro de masa O como se muestra en la Figura 2.2.

²Se define la media temporal de una variable $f = f(t)$ durante un período τ como: $\langle f \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$.

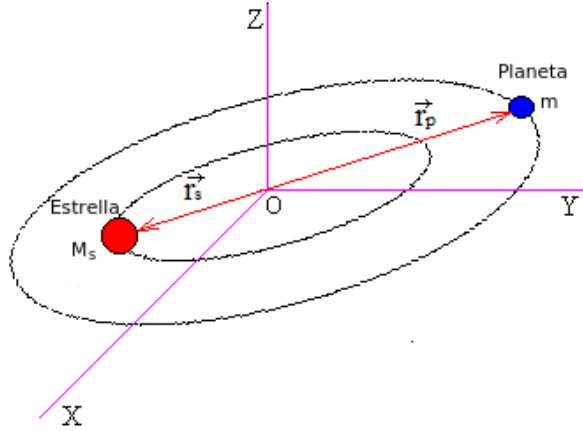


Figura 2.2: Sistema estrella-planeta orbitando mutuamente su centro de masa.

Colocando el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa, la posición de la estrella estará dada por el radiovector \vec{r}_s y la posición del planeta por \vec{r}_p , se cumple la ecuación:

$$M_s r_s = m r_p$$

de donde, $r_s = m r_p / M_s$. Como $r = r_p + r_s = r_p + m r_p / M_s = r_p (1 + m / M_s)$, tenemos

$$r_p = \frac{r}{1 + \frac{m}{M_s}} \quad \text{y} \quad r_s = \frac{m}{M_s} \frac{r}{1 + \frac{m}{M_s}}$$

Ahora, el momento de inercia de los dos cuerpos en movimiento es:

$$I = m r_p^2 + M_s r_s^2 = \mu r^2$$

hemos hecho,

$$\mu = \frac{M_s m}{M_s + m}$$

donde μ recibe el nombre de masa reducida. Esto quiere decir que el sistema estrella-planeta podemos reducirlo a un sistema de una sola partícula: el movimiento relativo del sistema estrella-planeta es equivalente al movimiento relativo de un cuerpo de masa igual a la masa reducida μ bajo una fuerza igual a la interacción existente entre el sistema estrella-planeta:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{G M_s m}{r^2},$$

como se ilustra en la Figura 2.3.

En consecuencia, la aceleración de un planeta masivo m con respecto a la estrella que orbita está dada por: $\ddot{r} = -G(M_s + m)/r^2$. Esto significa que es posible estudiar el movimiento relativo de m con respecto a M_s , como si m estuviera atraída

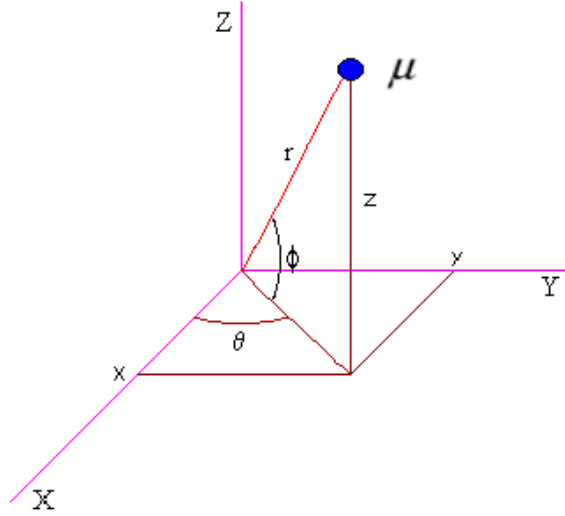


Figura 2.3: Movimiento de la masa reducida bajo un potencial central.

gravitatoriamente por una masa eficaz, fija, de valor $(M_s + m)$, situada en lugar de M_s . Las ecuaciones obtenidas hasta el momento son estrictamente ciertas para un sistema de dos cuerpos aislados. Claramente este es un concepto idealizado que no se da exactamente en la naturaleza. Un sistema planetario contiene muchos cuerpos (no solamente dos) y aunque el planeta puede tener una masa comparable con la masa de la estrella, la masa de la estrella predomina determinando el comportamiento orbital del planeta. La consideración de un movimiento elíptico entre cada par estrella-planeta es útil y bastante aproximada. La ecuación de movimiento para el i -ésimo planeta con respecto a su estrella puede ser escrita como:

$$\ddot{r}_i = -\frac{G(M_s + m_i)}{r_i^2} + a_i, \quad (2.9)$$

en la cual las a_i son aceleraciones de magnitud muy pequeña que contienen los efectos perturbativos sobre el i -ésimo planeta de todos los demás planetas del sistema [Goldstein, 1994]. Estas perturbaciones causan que los elementos de la elipse de la órbita planetaria varíen de manera periódica.

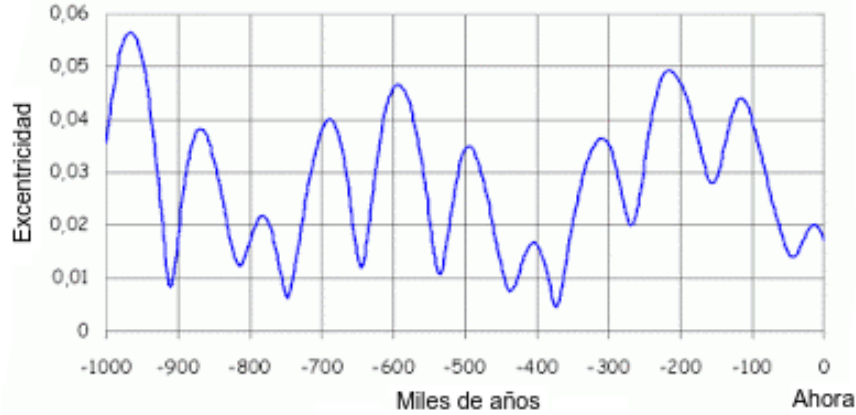


Figura 2.4: Variación de la excentricidad orbital de La Tierra en el último millón de años[Berger, 1988].

Por ejemplo, la excentricidad ϵ de la órbita de la Tierra (que actualmente es de 0,0167), varía desde 0 hasta 0,06; el componente mayor de estas variaciones ocurre en un período de 413.000 años. También hay ciclos de entre 95.000 y 136.000 años, siendo el ciclo más conocido de unos 100.000 años. Recientes investigaciones [Lisiecki, 2010] establecieron que la inclinación de la órbita de la Tierra cambia por la influencia de los demás planetas. La variación en la inclinación de la órbita de Tierra tiene un período de aproximadamente 70.000 años y fue estudiada inicialmente por Milankovitch [Berger, 1988]. El principal perturbador es el planeta Júpiter y el plano de la eclíptica oscila alrededor del plano de la órbita de Júpiter (este plano permanece aproximadamente invariante). La oscilación del plano de la eclíptica es de unos 100.000 años respecto al plano invariante el cual coincide con el ciclo predominante en las edades de hielo.

El momentum angular orbital de un planeta puede cambiar, debido a la perturbación de los demás planetas (Ver Figura 2.5). El momentum angular orbital (2.3) depende del semieje mayor y la excentricidad orbital, por lo cual su variación implica una variación en la excentricidad orbital: $\Delta\epsilon = \epsilon_f - \epsilon_i$ y en el radio orbital $\Delta r = r_f - r_i$; de tal manera que se genera un cambio en la energía cinética orbital: $\Delta E_{\epsilon(i,f)} = L_f^2/2mr_f^2 - L_i^2/2mr_i^2$:

$$\frac{\Delta E_{\epsilon(i,f)}}{m} = \frac{GM_s}{2} \left[\frac{(1 - \epsilon_f^2)}{r_f} - \frac{(1 - \epsilon_i^2)}{r_i} \right] \quad (2.10)$$

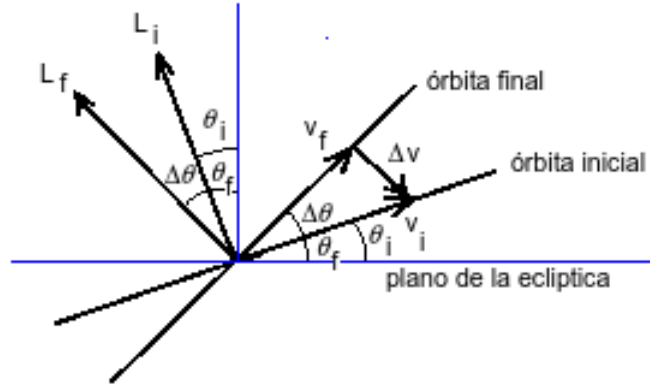


Figura 2.5: Variación del momentum angular y la inclinación orbital.

La inclinación orbital de un planeta también puede cambiar, $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$, debido a la perturbación de los demás planetas (Ver Figura 2.5). Por consiguiente, se presenta un cambio en la dirección de la velocidad pero no en su magnitud, aplicando el teorema del coseno: $\Delta v^2 = v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos \Delta\theta$, si $v_i = v_f$ tenemos, $\Delta v^2 = 4v_i^2 \sin^2(\Delta\theta/2)$. Podemos expresar la velocidad orbital del planeta haciendo uso de la ecuación de movimiento: $mv_i^2/r = GM_s m/r_i^2$, donde: $v_i^2 = GM_s/r_i$. La variación de la inclinación orbital $\Delta\theta$ se manifiesta en una variación de energía cinética: $\Delta E_\theta = \frac{1}{2}m\Delta v^2$:

$$\frac{\Delta E_{\theta(i,f)}}{m} = \frac{2GM_s}{r_i} \sin^2 \left(\frac{\theta_f - \theta_i}{2} \right) \quad (2.11)$$

Capítulo 3

Modelo estadístico

3.1. Discos de transición

Los discos de transición son de clase II y consta de la estrella rodeada de disco interno y externo separados por un gap. El disco interno tiene un radio interno r_{sub} (radio de sublimación) y externo r_{gap} (radio donde inicia el gap), está constituido generalmente de polvo de baja densidad. El gap no contiene polvo, muchos autores [Andrews et al., 2011, Bruderer, 2013] consideran que se debe a la formación de un planeta el cual ha capturado todo el polvo existente a su alrededor. El disco externo está constituido por un disco de gas y polvo de alta densidad, el disco de gas tiene un espesor que va desde r_{cgas} (radio de la cavidad de gas) hasta r_{cpolvo} (radio de la cavidad de polvo) y el disco de polvo desde r_{cpolvo} hasta r_o (radio externo) (ver Figura 3.1).

Como punto de partida para nuestro modelo, adoptamos la estructura física sugerida por [Andrews et al., 2011], implementado por [Bruderer, 2013] y aplicado para un análisis similar de Ophiucus IRS 48 [Bruderer et al., 2014]. Se supone que la densidad superficial del gas es una ley de potencias exponencial, siguiendo el modelo del disco viscosidad dependiente del tiempo $\nu \sim R\gamma$ [Lynden-Bell and Pringle, 1974, Hartmann et al., 1998].

La densidad superficial Σ del gas y polvo está dada por:

$$\Sigma(r) = \Sigma_c \left(\frac{r}{r_c} \right)^{-\gamma} \exp \left[- \left(\frac{r}{r_c} \right)^{2-\gamma} \right] \quad (3.1)$$

la cual depende del índice γ y los parámetros críticos Σ_c y r_c . El índice γ de la ley de potencias se toma como $\gamma = 1$, de acuerdo con los resultados para discos normales con distribuciones continuas de polvo y otros estudios de discos de transición [Andrews et al., 2011].

El disco de polvo interno está definido por el perfil $\Sigma(r)$, partiendo del radio de sublimación r_{sub} hasta r_{gap} , escalado por un factor δ_{polvo} , de la forma: $\delta_{polvo}\Sigma_{polvo}(r)$, para adaptarse a la parte del infrarrojo cercano de la DEE. El tamaño del disco interior por lo general es arbitrario ya que no tiene un efecto significativo sobre el exceso de infrarrojo cercano. Entre r_{gap} y r_{cgas} (radio de la cavidad de gas), la

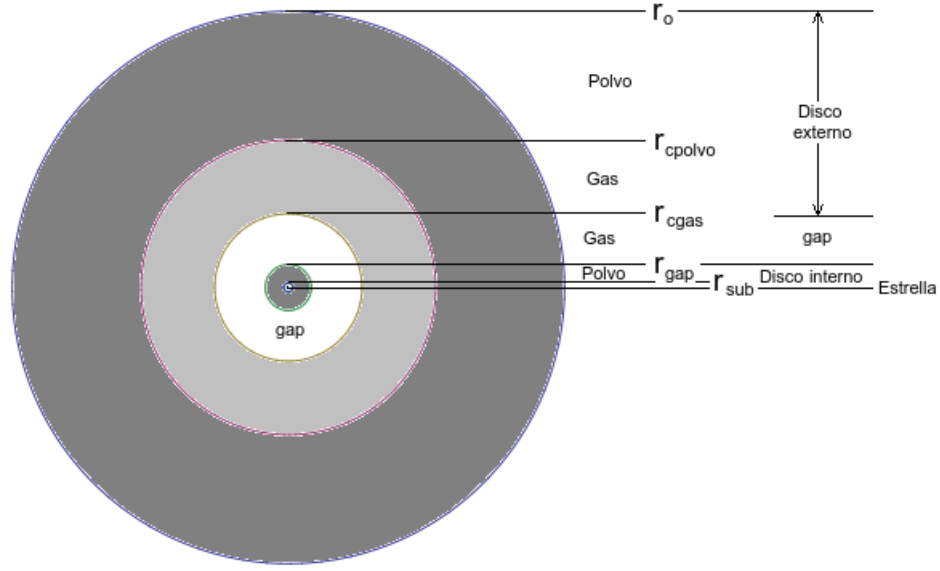
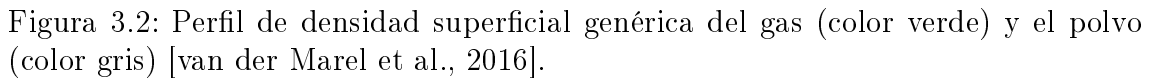


Figura 3.1: Estructura de gas y polvo de un disco de transición.

densidad del polvo se reduce en un factor δ_{cpolvo} (la caída en la densidad del polvo dentro de la cavidad), mientras que la densidad del gas δ_{gas} se escala con el factor δ_{gas} , es decir, $\delta_{gas}\Sigma_{gas}(r)$. La Figura 3.2 (Figura adaptada de van der Marel et al. 2015) muestra el perfil de densidad genérica de gas y polvo.

La estructura vertical de gas y polvo sigue una distribución gaussiana, definida por un ángulo de altura de la escala $h = h_c(R/R_c)^\psi$. Un disco en equilibrio hidrostático tendrá $\psi = 0,25$, mientras que un disco plano ($h/r = \text{constante}$) tendrá $\psi = 0$. El exceso de infrarrojo cercano y lejano en la DEE se relaciona directamente con la altura de escala $h(r)$ resultante para r_{sub} y r_{cpolvo} , respectivamente. La estructura vertical es una simplificación y no tienen en cuenta el equilibrio hidrostático de la temperatura del gas o del polvo.

Para la distribución vertical de polvo se ha introducido un gradiente de tamaño, de tal manera que los granos más grandes se concentran hacia el plano medio y los granos más pequeños se distribuyen a alturas verticales más grandes. En la práctica, esta parametrización imita de forma cruda la sedimentación con polvo. En cada radio, una población de "pequeños" granos representa una pequeña fracción de la densidad total de la columna, $(1-f)\Sigma$, y se distribuye verticalmente como una gaussiana con altura de escala $h = h_c(R/R_c)^\psi$. Por el contrario, la mayor parte de la columna total ($f\Sigma$) está compuesta por una población de grano "grande", condensada hacia el plano medio con una altura de escala χ^h (donde $\chi \leq 1$). En un sistema de coordenadas esféricas con simetría especular y azimutal, las estructuras de densidad bidimensional para cada población de polvo son



$$\rho_l = \frac{f \Sigma}{\sqrt{2\pi R \chi^h}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\pi/2 - \theta}{\chi^h} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

donde los subíndices s y l denotan las poblaciones de polvo pequeñas y grandes, respectivamente, θ es la coordenada de latitud (vertical) medida desde el polo ($\theta = 0$) al ecuador (el plano medio, $\theta = \pi/2$), y el valor de Σ depende de la posición radial como se ha indicado anteriormente. Obsérvese que en este sistema de coordenadas, la altura de la escala h es un ángulo: La altura de la escala en unidades físicas (distancia) es $H \simeq hR$. Un perfil genérico de densidad transversal con esta forma paramétrica se muestra en la Figura 3.3 (imagen tomada de Andrews et al., 2011). La curva azul sigue la población de polvo "grande", concentrada hacia el plano medio con una altura de escala χh . La curva naranja marca la "pequeña" población de polvo que domina en la atmósfera del disco, y la curva discontinua traza el perfil compuesto. La fracción de la densidad de columna aportada por la gran población de polvo se denomina f .

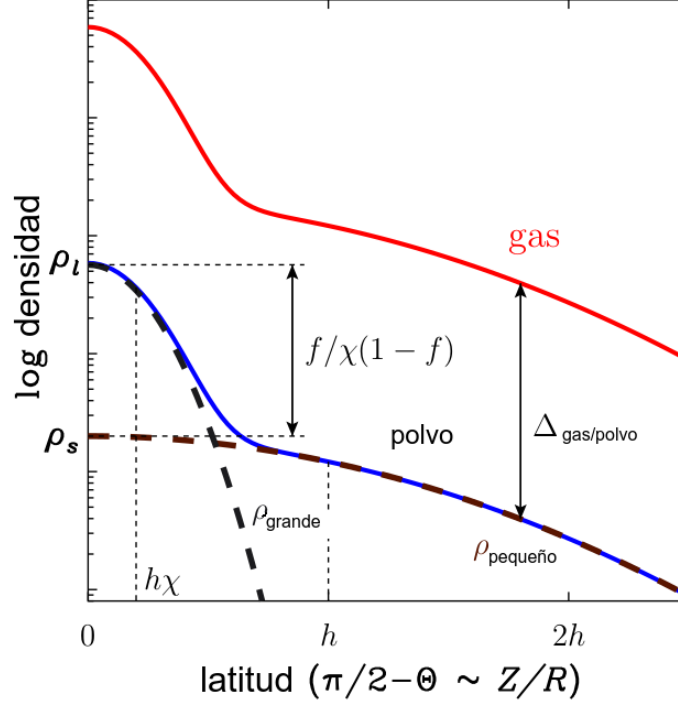


Figura 3.3: Modelo de densidad transversal de gas (línea roja) y polvo (línea azul) del disco de transición [van der Marel et al., 2015].

Este modelo de estructura tiene once parámetros: cinco describe el perfil de densidad superficial, $\{\Sigma_c, \gamma, r_c, \delta_{cpolvo}, r_{cpolvo}\}$ y otros seis que caracterizan la distribución vertical del polvo, $\{h_c, \psi, \chi, f, h_{rim}, h_{wall}\}$. Algunos de estos parámetros no pueden ser determinados con los datos disponibles, por lo cual se fijan con valores representativos. Por ejemplo, $\gamma = 1$, de acuerdo con discos normales con distribuciones de polvo continuas. El parámetro $\chi = 0,2$ corresponde a los granos grandes distribuidos un 20 % de la escala de altura, h y $f = 0,85$ el 85% de la columna total compuesta de la población de granos grandes.

La fotosfera estelar se considera como un cuerpo negro, el cual interviene en el proceso de acreción, a través de los parámetros de temperatura y luminosidad, los cuales están relacionados de la siguiente manera:

$$L_{ac}(\nu) = \pi B_\nu(T_{ac}, \nu) \frac{GM_s}{R_s} \dot{M} \frac{1}{\sigma T_{ac}^4} \quad (3.4)$$

donde $B_\nu(T_{ac}, \nu)$ es la función de cuerpo negro de Planck, G la constante gravitacional, M_s y R_s la masa y el radio de la estrella, \dot{M} la tasa de acreción de masa y σ la constante de Stefan-Boltzmann. Los valores observados de \dot{M} son inciertos hasta un orden de magnitud y variables con el tiempo.

3.2. Inclínación de Discos de transición.

Como se ha mostrado, los sistemas planetarios se forman a partir de discos de gas y polvo que rodean estrellas recién nacidas. Hasta ahora se pensaba que estos discos protoplanetarios eran perfectamente planos y se asumía que los protoplanetas estaban determinados a mantenerse en este mismo plano. Al comparar diferentes modelos tridimensionales del disco con observaciones reales, astrónomos identificaron y caracterizaron la geometría del sistema, en donde establecieron que cada disco se encuentra en un plano distinto [Marino et al., 2015], como se muestra en 3.4 (imagen tomada de Marino et al., 2015).

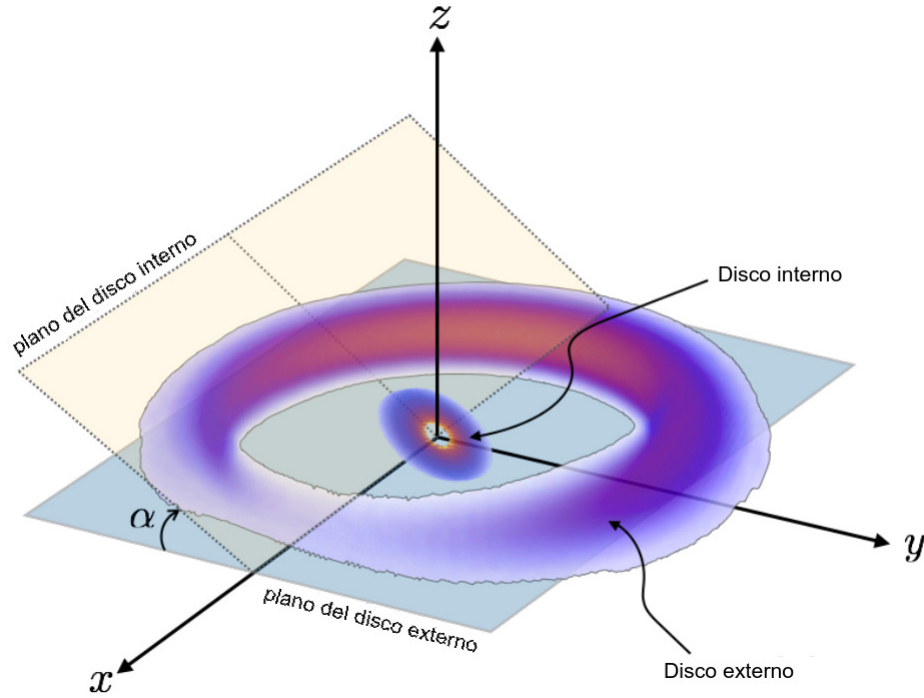


Figura 3.4: Vista esquemática de la inclinación de los planos orbitales de los anillos en el disco de transición HD 142527 [Marino et al., 2015].

La inclinación orbital de un disco puede cambiar, $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$, debido a la presencia de otro disco. Por consiguiente, se presenta un cambio en la dirección de la velocidad pero no en su magnitud, aplicando el teorema del coseno: $\Delta v^2 = v_i^2 + v_f^2 - 2v_i v_f \cos \Delta\theta$, si $v_i = v_f$ tenemos, $\Delta v^2 = 4v_i^2 \sin^2(\Delta\theta/2)$. Podemos expresar la velocidad orbital de un planetesimal haciendo uso de la ecuación de movimiento: $mv_i^2/r = GM_s m/r_i^2$, donde: $v_i^2 = GM_s/r_i$. La variación de la inclinación orbital $\Delta\theta$ se manifiesta en una variación de energía cinética: $\Delta E_\theta = (1/2)m\Delta v^2$:

$$\frac{\Delta E_{\theta(i,f)}}{m} = \frac{2GM_s}{r_i} \sin^2 \left(\frac{\theta_f - \theta_i}{2} \right) \quad (3.5)$$

Este cambio de energía puede transformarse en un cambio en la excentricidad orbital: $\Delta\epsilon = \epsilon_f - \epsilon_i$ y en el radio orbital: $\Delta r = r_f - r_i$; de tal manera que se genera un cambio en la energía cinética orbital: $\Delta E_{\epsilon(i,f)} = L_f^2/2mr_f^2 - L_i^2/2mr_i^2$:

$$\frac{\Delta E_{\epsilon(i,f)}}{m} = \frac{GM_s}{2} \left[\frac{(1 - \epsilon_f^2)}{r_f} - \frac{(1 - \epsilon_i^2)}{r_i} \right] \quad (3.6)$$

En síntesis, se presenta una transformación de energía, de la forma: $\Delta E_{\theta(i,f)} \rightarrow \Delta E_{\epsilon(i,f)}$.

3.3. El modelo para el disco de transición

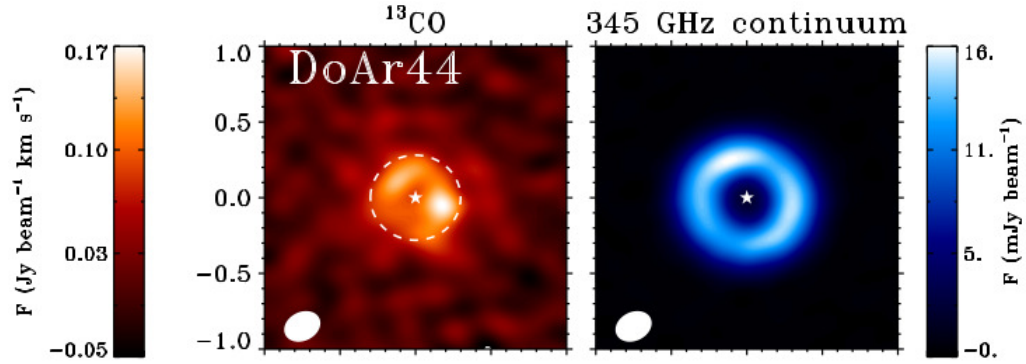


Figura 3.5: Observación de ALMA de la emisión de gas (izquierda) y polvo (derecha) de los discos que rodean a DoAr44 [van der Marel et al., 2016].

Como ejemplo de disco de transición hemos tomado el DoAr44 (también llamada ROX44 y Haro1-16) es un disco con un anillo de polvo simétrico de 60 ua de radio, el cual se observó con ALMA ver Figura 3.5 (Imagen tomada de van der Marel et al., 2016). Se encontró que el radio de la cavidad del polvo era de $r_{polvo} = 32$ ua. El tamaño de la cavidad de gas es de $r_{gas} = 16$ ua. El δ_{gas2} dentro de las 16 ua es como máximo $\leq 10^{-4}$. Se requiere una caída adicional en la densidad de gas entre 16 y 32 ua de $\delta_{gas} = 10^{-2}$ para ajustar la emisión observada [van der Marel et al., 2016]. Es una estrella tipo espectral K3 ($M_s = 1,3 M_\odot$, $R_s = 1,75 R_\odot$), con una luminosidad $L_s = 1,4 L_\odot$ y se encuentra a una distancia de 125 pc.

Inicialmente se toma como sistema físico el disco de transición DoAr44, básicamente es un anillo polvo (y gas) completamente simétrico alrededor de su estrella [van der Marel et al., 2016]. Para modelarlo consideramos idealmente que está constituido por una proto-estrella esférica de gas y un anillo de planetesimales (o gas), ambos se consideran como un sistema de partículas con masas iguales. Mediante un proceso de acreción los planetesimales pueden dar origen a objetos masivos (planetas, planetas enanos, asteroides o cometas). En primera aproximación, la distribución Gamma puede describir la geometría observada en el disco de transición

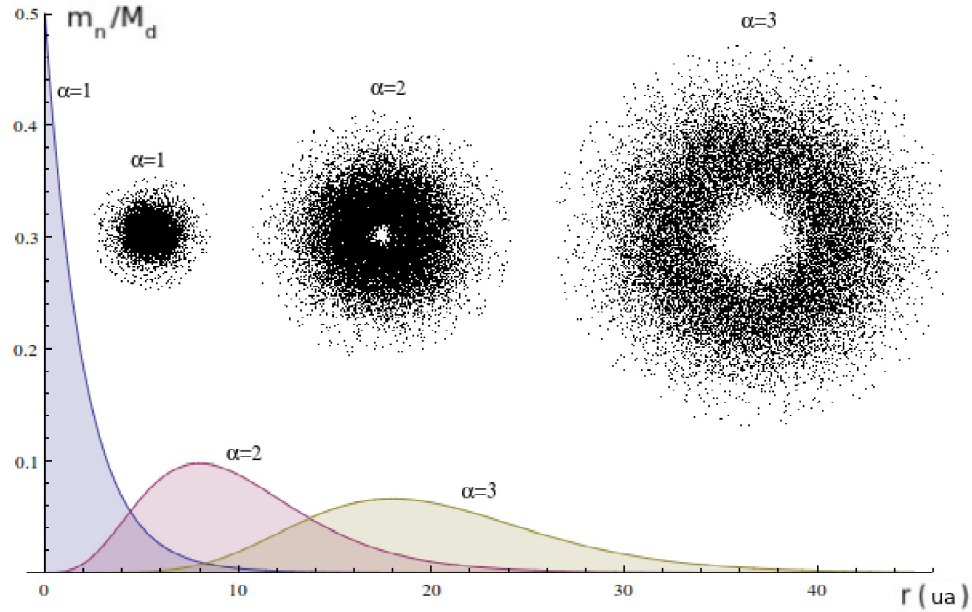
Densidad superficial	r_c (ua)	Σ_c ($g\ cm^{-2}$)	GDR	M_{polvo}	M_{gas}
	25	60	100	0,05	2,5
Estructura radial	r_{cgas} (ua)	δ_{gas2}	r_{cpolvo} (ua)	δ_{gas}	r_o (ua)
	16	$\leq 10^{-4}$	32	10^{-2}	60
Disco interno	r_{sub} (ua)	r_{gap} (ua)	δ_{polvo}		
	0,08	1,0	1×10^{-2}		
Estructura vertical	h_c (rad)	ψ	f_{ls}	χ	
	0,1	0,1	0,85	0,2	

Tabla 3.1: Parámetros del disco de transición DoAr44

DoAr44, se puede obtener la distribución radial $R_n(r)$ de partículas para $0 \leq r < \infty$ haciendo uso de la función densidad Gamma:

$$R(r) = \begin{cases} \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{\alpha-1} e^{-\lambda r} & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

donde $R(r)r^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en la región r y $r + dr$. Por consiguiente, al integrar en todo el espacio obtenemos la unidad: $\int_0^\infty R(r)dr = 1$.

Figura 3.6: Gráfica de la función densidad Gamma para $\alpha = 1, 5, 10$ y $\lambda = 0,5$.

En la expresión (3.7) se encuentran los parámetros $\alpha > 0$ que establece la forma de la distribución y $\lambda > 0$ que determina el alcance de la asimetría positiva. El término $\Gamma(\alpha)$ es el responsable de la convergencia de la distribución.

En la Figura 3.6 se muestra la función densidad Gamma, para $\alpha = 1$ se obtiene una función exponencial la cual viene a representar la proto-estrella central. La función exponencial corresponde a un sistema de partículas, cuyo número crece exponencialmente hacia en el centro de la estrella y disminuye rápidamente a medida que nos alejamos del centro. Para $\alpha > 1$ tenemos un sistema de partículas formando un anillo con asimetría positiva.

Las nebulosas protoplanetarias pueden considerarse como un gas de partículas rarificado, es decir, cierta cantidad de partículas (átomos, moléculas o planetesimales) se encuentran distribuidas en una región del espacio muy grande (del orden de unidades astronómicas $\sim 10^{11}$ m). La formación de la estrella o de objetos masivos en el anillo está determinada por el proceso de acreción, es decir, la manera como interaccionan las partículas para dar origen a un objeto masivo. En la región del espacio considerado, la probabilidad que dos partículas se encuentren es muy pequeña (estadísticamente corresponde a un «evento raro») y la probabilidad de que se encuentren más de dos partículas simultáneamente, en términos prácticos, es nula.

Ahora se tiene que determinar como se dan estos eventos (el encuentro de dos partículas) en el espacio. En la Figura 3.7 se muestran tres clases de patrones que pueden exhibir los eventos (regular, agregado y aleatorio), en un cuadrado de lado unidad, y la frecuencia de las distancias entre los eventos.

- en el patrón regular, no existen distancias pequeñas o son menos frecuentes que en el caso agregado, mientras que las intermedias tienen mayor presencia, ver Figura 3.7 (izquierda).
- en el patrón agregado, hay una mayor cantidad de distancias pequeñas y grandes y una frecuencia mucho menor de cierta distancia intermedia, ver Figura 3.7 (centro).
- en el patrón aleatorio, se asemeja a una distribución normal pero con una asimetría positiva, ver Figura 3.7 (derecha).

Como se tiene un gas de partículas rarificado los eventos ocurren de una manera completamente aleatoria, es decir, son procesos puntuales con aleatoriedad espacial completa (Complete Spatial Randomness CSR). El concepto de aleatoriedad espacial completa establece que el número de eventos en una región del espacio obedece a una distribución de Poisson.

Esto implica que no existen interacciones entre los eventos, lo cual se cumple porque no existen interacciones de largo alcance, por consiguiente, un evento en una región es independiente del otro evento en otra región disyunta de la anterior. Un evento ocurre con regularidad e independencia, siendo el número de eventos teóricamente ilimitado. Este comportamiento también valida la correspondencia con la distribución de Poisson, que se especializa en la probabilidad de ocurrencia de

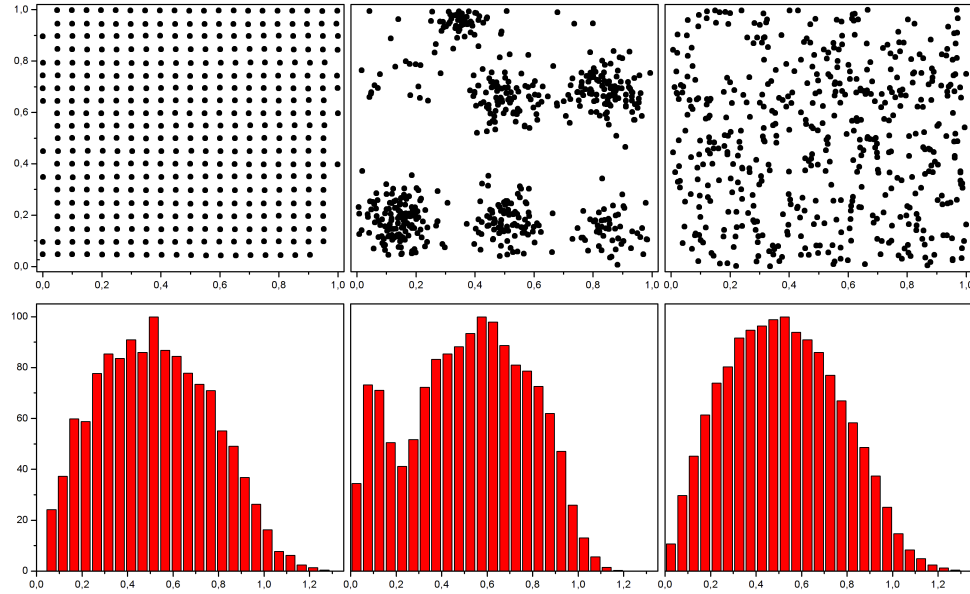


Figura 3.7: Eventos e histograma de frecuencias de un patrón regular (izquierdo), agregado (centro) y aleatorio (derecho) en un cuadrado unidad.

eventos con probabilidades muy pequeñas. Nótese, que la probabilidad es nula si se considera el encuentro de más de dos partículas en un instante de tiempo.

La probabilidad de Poisson de que un determinado número de partículas (k) se encuentren en cierta posición r está dada por:

$$P(k, r, \lambda) = \frac{1}{k!} (\lambda r)^k e^{-\lambda r}. \quad (3.8)$$

donde $\lambda > 0$ es la frecuencia media, que es igual a la media y la varianza.

Se considera un sistema de partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio formando anillos concéntricos, alrededor de la estrella. Sea $r_1 = a_0$ la distancia donde se da el encuentro de dos partículas ($k_1 = 2$) con una frecuencia media $\lambda_1 = 2/r_1$ (como se muestra en la Figura 3.8). Sea ($r_2 > r_1$) la distancia donde se da el encuentro de dos pares de partículas ($k_2 = 4$) con una frecuencia media de $\lambda_2 = 4/r_2$. Sea ($r_3 > r_2$) la distancia donde se da el encuentro de tres pares de partículas ($k_3 = 6$) con una frecuencia media de $\lambda_3 = 6/r_3$. Por consiguiente, r_n es la distancia donde se da el encuentro de n pares de partículas ($k_n = 2n$) con una frecuencia media $\lambda_n = 2n/r_n$.

Esta frecuencia media de encuentros entre las partículas induce un proceso de acreción, el cual da origen a un objeto masivo, que orbita la estrella a una distancia r_n . Entonces r_n corresponde al radio orbital del objeto (semieje de la órbita) y n corresponde a un número de órbita. La relación entre la primera frecuencia media y las restantes esta dada por: $\lambda_1 = \kappa_n \lambda_n$. El coeficiente κ_n debe ser directamente proporcional a n ($\kappa_n \propto n$), donde la constante de proporcionalidad (ε_n) representa

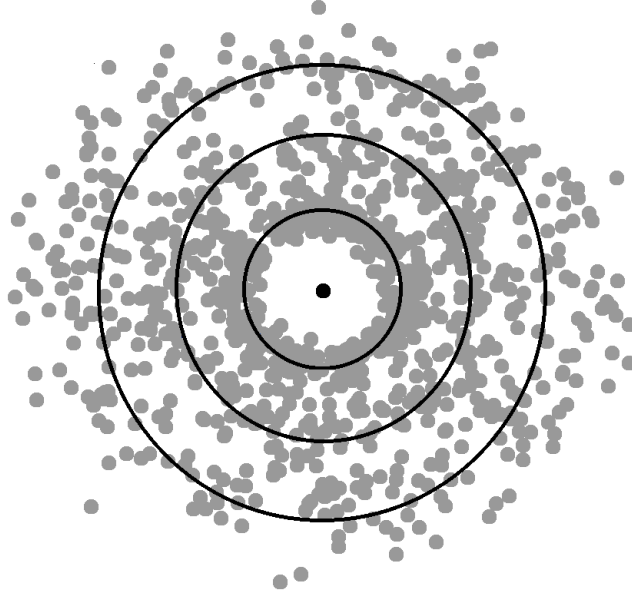


Figura 3.8: Partículas distribuidas aleatoriamente en el espacio formando anillos concéntricos.

las fluctuaciones con respecto al valor r_1 . Se obtiene:

$$r_n = a_n n^2 \quad (3.9)$$

donde $a_n = \varepsilon_n r_1$ es un parámetro libre. El parámetro ε_n está relacionado con el estado de la estrella en el momento que se da la formación de los anillos. Si el estado de la estrella cambia continuamente, se tiene una serie de valores ε_n , y si el estado de la estrella es cuasi-estacionario, $\varepsilon_n = 1$, por consiguiente, se obtiene un único valor para a_n denotado como $a_s = r_1$, entonces,

$$r_n = a_s n^2. \quad (3.10)$$

Un proceso de Poisson consiste en contar eventos raros que ocurren a cierta distancia. La distribución acumulada de Poisson nos conduce a una función densidad Erlang, mediante la ecuación que relaciona un proceso de Poisson con la función densidad Erlang:

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} (\lambda r)^k e^{-\lambda r} = \int_{x=r}^{\infty} \lambda \frac{1}{(2n)!} (\lambda x)^{2n} e^{-\lambda x} dx.$$

La función densidad Erlang en un caso particular de la función Gamma, de esta manera determinamos los parámetros α y λ de la distribución Gamma (3.7): $\alpha = 2n + 1$ y $\lambda = 2n/r_n$. Entonces, la distribución radial de partículas está dada por:

$$R_n(r) = \left(\frac{2n}{r_n}\right) \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{2nr}{r_n}\right)^{2n} e^{-\frac{2nr}{r_n}}, \quad (3.11)$$

como esta expresión es una función densidad, al integrar sobre todo el espacio se debe obtener la unidad:

$$\int_0^\infty R_n(r) dr = 1.$$

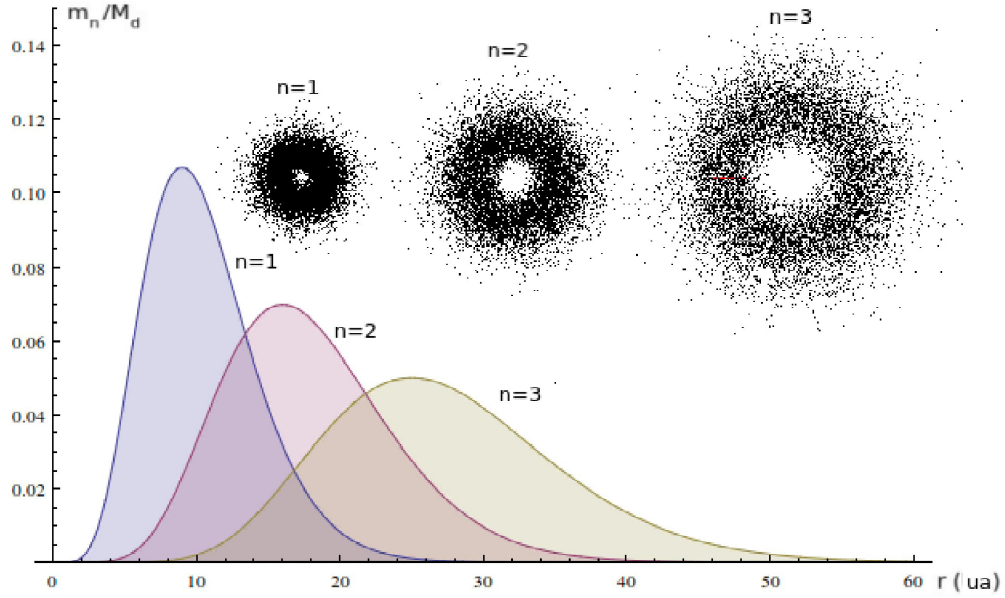


Figura 3.9: Distribución radial de partículas, $R_n(r)$, para $n = 1, 2, 3$ y $r_n = 1, 4, 9$, respectivamente.

En la Figura 3.9 se muestra la distribución radial de partículas para $n = 1, 2, 3$, que da origen a tres anillos concéntricos con un máximo en $r_n = 1, 4, 9$, respectivamente. En cada anillo se genera un proceso de acreción de materia que da origen a un cuerpo masivo (planetas o planetas enanos) que orbita la estrella (en la posición r_n), y objetos de menor tamaño a medida que nos alejamos de esta posición (satélites, asteroides o cometas), todo esto dependiendo de la existencia y cantidad de materia existente. En consecuencia, n corresponde a un número de órbita.

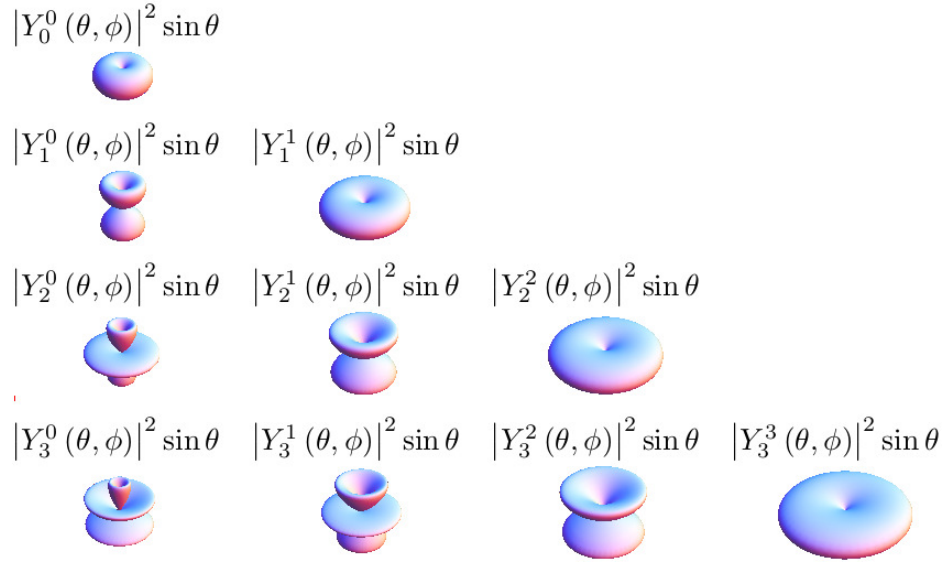


Figura 3.10: Representación gráfica de $|Y_m^l(\theta, \phi)|^2 \sin \theta$. Armónicos esféricos que generan la función para la distribución de partículas que va a formar anillos.

La función radial $R_n(r)$ permite describir la distribución de partículas a lo largo de r , mientras que la función angular $Y_n(\theta, \phi)$ se encarga de distribuir las partículas barriendo los ángulos θ y ϕ para formar al anillo, en otra forma, la función $Y_n(\theta, \phi)$ encierra las partículas dadas por $R_n(r)$ dentro de un anillo. Las líneas de un campo gravitacional \mathbf{g} son abiertas, por lo cual es campo es irrotacional: $\nabla \times \mathbf{g} = 0$. Siempre se cumple que el rotacional del gradiente de un campo escalar es nulo: $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$, se obtiene inmediatamente que $\mathbf{g} = -\nabla \varphi$, donde el campo escalar φ es el potencial gravitacional. El anillo no contiene la fuente del campo (masa que genera el campo), por consiguiente, $\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$. A partir de estos resultados encontramos fácilmente la ecuación de Laplace: $\nabla^2 \varphi = 0$. Los armónicos esféricos $Y_m^l(\theta, \phi)$ son funciones armónicas que representan la variación espacial de un conjunto ortogonal de soluciones de la ecuación de Laplace (cuando la solución se expresa en coordenadas esféricas). Basados en la ortonormalidad de los armónicos esféricos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_m^l(\theta, \phi)^* Y_{m'}^{l'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Encontramos la expresión que nos genera un anillo para distintos valores de n , ver Figura 3.10, entonces:

$$Y_n(\theta, \phi) = |Y_{n-1}^{n-1}(\theta, \phi)|^2 \sin \theta, \quad (3.12)$$

es la función densidad para la parte angular de la distribución,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n(\theta, \phi) d\theta d\phi = 1.$$

Para la estrella, $\alpha = 1$ en la función de distribución Gamma (3.7), por consiguiente:

$$S_n(r) = \frac{2n}{r_n} e^{-\frac{2n}{r_n} r}, \quad (3.13)$$

esta expresión es una función densidad, por consiguiente, la integral sobre todo el espacio debe ser la unidad,

$$\int_0^{\infty} S_n(r) dr = 1.$$

La función angular para la estrella y el anillo deben tener la misma condición de frontera de Dirichlet. Si la función es armónica en una región, entonces en el interior de la región esta función no posee ni valores máximos ni mínimos, estos valores máximos y mínimos los adquiere la función únicamente en la frontera. Si la función es constante en la frontera, el máximo y el mínimo son iguales. En consecuencia, la función angular para la estrella debe coincidir con el valor máximo de la primera solución armónica de la ecuación (3.12):

$$Z(\theta, \phi) = Y_1(\theta, \phi) = |Y_0^0(\theta, \phi)|^2 \sin \theta = \frac{\sin \theta}{4\pi}, \quad (3.14)$$

asímismo,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Z(\theta, \phi) d\theta d\phi = 1.$$

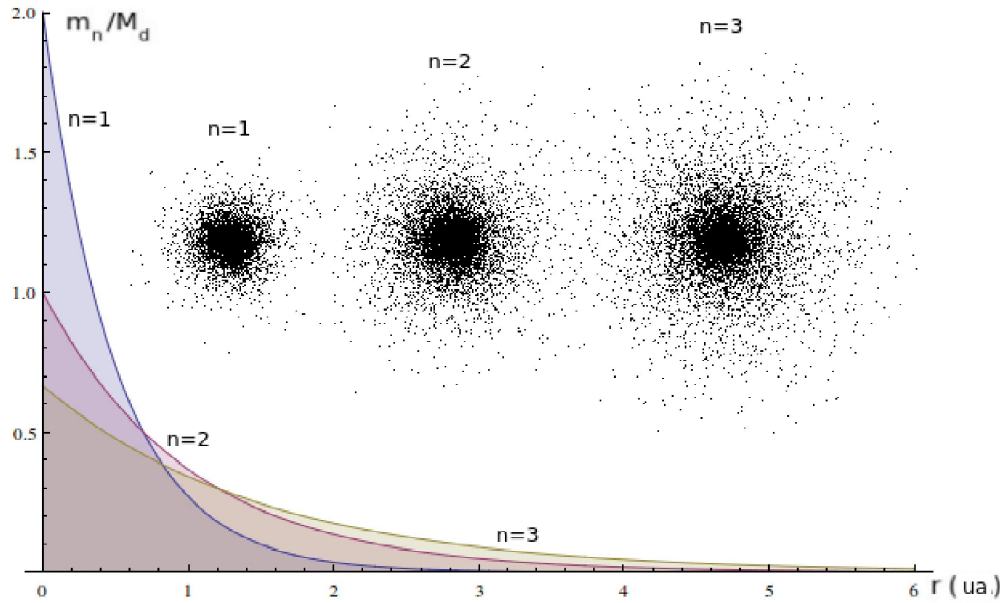


Figura 3.11: Función densidad $S_n(r)$ para $a_s = 1$ y $n = 1, 2, 3$.

Con la función de densidad radial $R_n(r)$ y angular $Y_n(\theta, \phi)$ podemos crear la distribución de partículas de polvo para el disco de transición DoAr44 mostrado en la Figura 3.12.

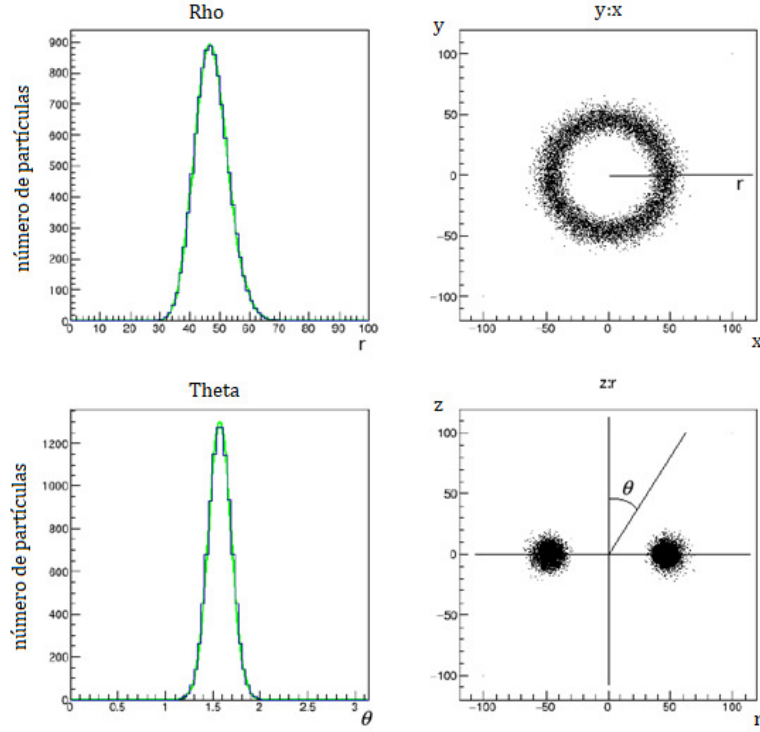


Figura 3.12: Distribución de partículas radial $R_n(r)$ y angular $Y_n(\theta, \phi)$ para el disco de transición DoAr44.

Las partículas en el anillo y la estrella se distribuyen obedeciendo a la función densidad de materia:

$$\tau_n(r, \theta, \phi) = m_n R_n(r) Y_n(\theta, \phi) \quad (3.15)$$

$$\sigma_n(r, \theta, \phi) = M_n S_n(r) Z(\theta, \phi) \quad (3.16)$$

donde n denota el número de órbita, m_n la masa total de las partículas (polvo o gas) que constituyen el anillo y M_n la masa total de las partículas (gas) que dan origen a la estrella. Integrando

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \tau_n(r, \theta, \phi) dr d\theta d\phi &= m_n \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \sigma_n(r, \theta, \phi) dr d\theta d\phi &= M_n \end{aligned}$$

Aunque el elemento de volumen en coordenadas esféricas es $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$, los términos r^2 y $\sin \theta$, se encuentran inmersos en las distribuciones radial y angular, respectivamente; con la finalidad de usar estas expresiones en los algoritmos computacionales.

3.4. Modelo para el disco protoplanetario

Para establecer el modelo para el disco protoplanetario tomaremos como ejemplo, el disco protoplanetario HL-Tauri (abreviado HL-Tau), el cual se encuentra en la constelación de Tauro, a unos 450 años luz (140 pc) de la Tierra en la nube molecular de Tauro [Stephens et al., 2014]. Contiene una estrella T-Tauri muy joven con una magnitud aparente de 15.1, es decir, que es demasiado débil para ser observada a simple vista. La estrella T-Tauri tiene una DEE Clase I-II. El disco ha sido ampliamente estudiado en el continuo de longitud de onda sub-milimétrica [Beckwith et al., 1989, Kwon et al., 2011, Stephens et al., 2014]. Las observaciones milimétricas de mayor resolución hasta ahora [Kwon et al., 2011] revelaron un disco de 120 ua y sugirieron, en comparación con la DEE, que los granos milimétricos ya se habrían instalado en el plano medio. Además de la estructura del disco, se han descrito un flujo de salida bipolar molecular (por ejemplo, Mundt et al., 1990) y una envoltura [Men'shchikov et al., 1999, Robitaille et al., 2007].

Las recientes observaciones de ALMA del disco que rodea a HL-Tau [ALMA Partnership et al., 2015], revelan una distribución espacial del polvo muy compleja, el disco protoplanetario esta conformado por una serie de bandas oscuras (D=Dark en la Figura 3.13, tomada de ALMA Partnership et al., 2015), llamadas gaps y una serie de bandas brillantes (B=Bright en la Figura 3.13, tomada de ALMA Partnership et al., 2015). Se asume que los gaps se originan por la existencia de planetas que barren o capturan la materia a su alrededor. Se encontró que la densidad del polvo se disminuye en un factor de 10 en las aberturas principales en comparación con las bandas brillantes. Las masas anulares varían entre 10 y 100 M_{\oplus} de polvo y cada uno de los gaps más profundos es consistente con la eliminación de hasta 40 M_{\oplus} de polvo. Si este material se ha acumulado en cuerpos rocosos. El modelo de transferencia radiativa propuesto indica que el anillo más externo decae en granos milimétricos en comparación con los anillos centrales. Esto sugiere un crecimiento de grano más rápido en las regiones centrales y/o migración radial de los granos más grandes. La morfología de los gaps observados por ALMA muestran un alto grado de contraste en comparación con los anillos brillantes indicando que el disco de polvo milimétrico es geoméricamente delgado (altura de la escala ~ 1 ua a 100 ua) y que una gran cantidad de asentamiento de grandes granos ya ha ocurrido. Asumiendo un modelo estándar de sedimentación de polvo, encontraron que las observaciones son consistentes con un coeficiente de viscosidad turbulenta de unos 10^{-4} . Estimaron que la relación gas/polvo en esta capa fina es del orden de 5 si la relación inicial es 100. La emisión de HCO^+ y CO es consistente con el gas en movimiento Kepleriano

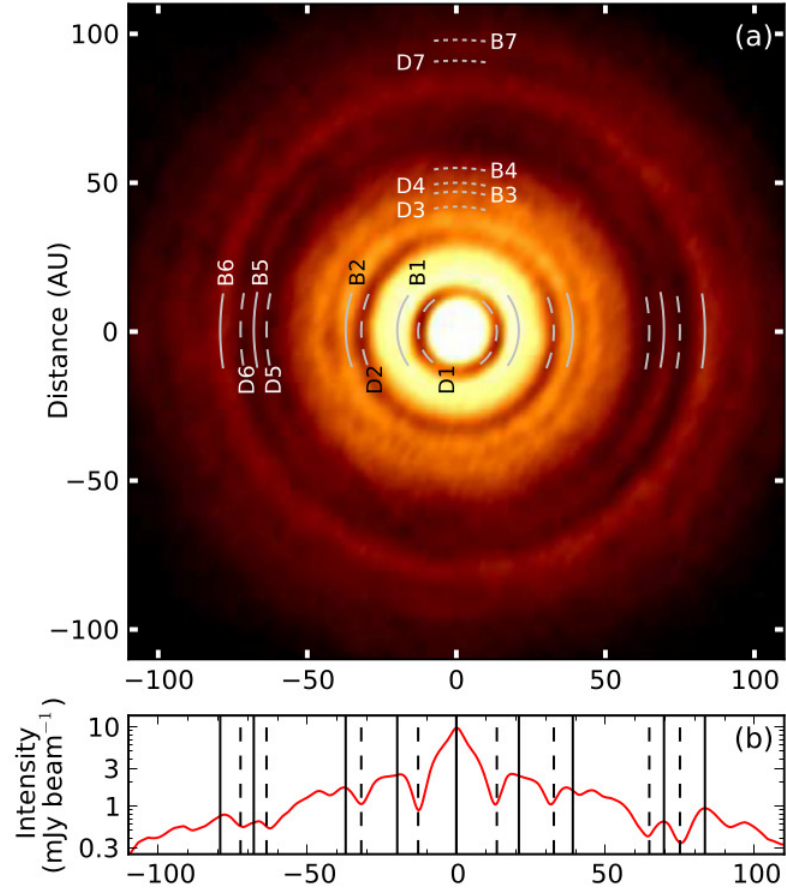


Figura 3.13: Estructura del disco protoplanetario HL-Tauri. Este está conformado por una serie de bandas brillantes compuestas de polvo y bandas oscuras (gaps) donde se presume la formación planetaria [ALMA Partnership et al., 2015].

alrededor de una estrella de $1.7 M_{\odot}$ en radios de $\leq 10 - 120$ ua. La masa del disco es de unas $0.14 M_{\odot}$.

El rastreo de las propiedades de las capas de polvo profundamente en el interior del disco requiere observaciones a largas longitudes de onda (milímetro) en las que el disco se vuelve ópticamente delgado. Varios estudios de múltiples longitudes de onda están sugiriendo ahora que la mayor abundancia de grano depende del radio, con una concentración hacia el centro de los discos protoplanetarios, sin embargo, la resolución espacial fue insuficiente para resolver la estructura vertical de la capa de polvo. En general, la región del plano medio de los discos permanece pobremente limitada por las observaciones directas [Pinte et al., 2016].

HL-Tau se observó recientemente con ALMA utilizando líneas de base de hasta ~ 15 km a longitudes de onda de 0.8-3 mm, lo que dio lugar a resoluciones espaciales hasta 3.5 ua [ALMA Partnership et al., 2015]. Estos datos proporcionan la resolución angular crítica necesaria para estudiar los detalles del plano medio del disco.

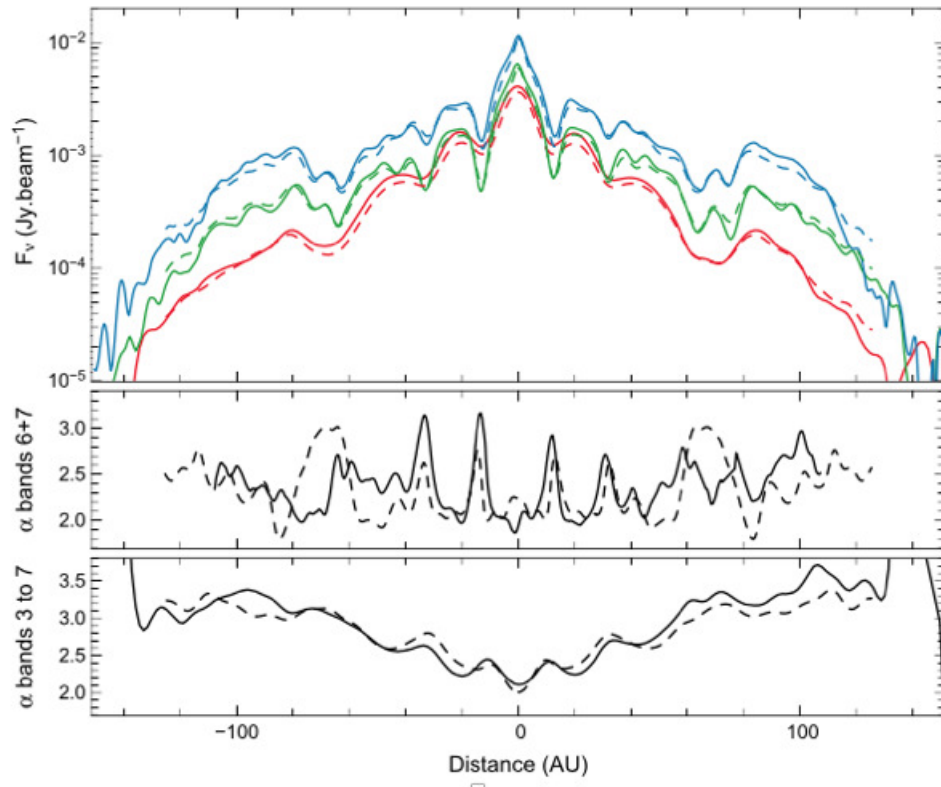


Figura 3.14: El brillo observado en cada banda y los perfiles de los índices espectrales medidos a lo largo del eje mayor del disco (Tomada de Pinte et al., 2016).

En la parte superior de la Figura 3.14 (Tomada de Pinte et al., 2016) se muestran los cortes de mapas CLEAN observados y sintéticos a lo largo del eje principal del disco (banda roja = 3, 2.9 mm, banda verde = 6, 1.3 mm, banda azul = 7, 870 μm). La resolución espacial a lo largo del disco es 10, 4, y 3 ua en las tres bandas. En la parte media de la Figura, se muestra el perfil de índice espectral derivado de la combinación de las bandas 6+7. En la parte inferior de la Figura se muestra el perfil de índice espectral obtenido por convolución de la banda 6 y 7 y corresponden a la misma resolución que el mapa de la banda 3 y se ajusta un índice espectral pixel por pixel. En los tres paneles, las observaciones se trazan con una línea completa, mientras que el modelo se traza con una línea discontinua [Pinte et al., 2016].

En las tres bandas se observa una estructura similar de anillos brillantes alternantes y oscuros. El índice espectral medido entre 0,87 y 2,9 mm (panel inferior) muestra un aumento significativo desde las regiones internas al disco externo, de $\sim 2,2$ a $\sim 3,5$, indicando un cambio radial en la emisividad de polvo convolucional espacialmente y/o en la profundidad óptica. Los datos de la banda 6 y 7 [ALMA Partnership et al., 2015] proporciona un mapa de índice espectral de resolución más alta, y un corte a través de éste a lo largo del eje mayor se presenta en el panel central de la Figura 3.13.

Esta estructura del disco protoplanetario obtenida por ALMA se obtuvo con una resolución equivalente a 5 ua, correspondiente a una resolución angular de aproximadamente 35 miliarcosegundos, mejor que la que suele lograrse con el telescopio espacial Hubble de NASA/ESA. Tomamos la posición de las bandas brillantes [ALMA Partnership et al., 2015] mostrada en la Tabla 3.2.

Anillo	$m_n (M_{\oplus})$	n	$r_n (ua)$
B1	47	20	20.4
B2	53	27	38.1
B3	30	30	47.0
B4	62	32	55.0
B5	7	36	68.8
B6	101	39	81.3
B7	123	43	97.0

Tabla 3.2: Datos sobre las bandas brillantes de H1-Tauri ALMA Partnership et al. [2015].

Por consiguiente, para describir un disco protoplanetario como H1-Tauri, en donde se evidencia claramente que esta constituido por una serie de anillos brillantes concéntricos [ALMA Partnership et al., 2015], definimos la función densidad de materia:

$$\tau(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{N_\tau} m_n R_n(r) Y_n(\theta, \phi) \quad (3.17)$$

$$\sigma(r, \theta, \phi) = \sum_{n=1}^{N_\sigma} M_n S_n(r) Z(\theta, \phi) \quad (3.18)$$

donde m_n la masa de cada uno de los N_τ anillos que conforman al disco protoplanetario y M_n es la masa de cada una de las N_σ capas que darán origen a la proto-estrella. Cada uno de los términos de masa dependen de la distribución de materia, la ausencia de materia hace que algunos de estos términos sean cero, de tal manera que no todos los números de órbita contribuyen en la sumatoria. Al integrar la expresión (3.17) obtendremos la masa del disco protoplanetario, M_d , y la masa de la estrella, M_s :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \tau(r, \theta, \phi) dr d\theta d\phi = \sum_{n=1}^{N_\tau} m_n = M_d$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \sigma(r, \theta, \phi) dr d\theta d\phi = \sum_{n=1}^{N_\sigma} M_n = M_s$$

En la Figura 4.2 se muestra la distribución radial para el disco protoplanetario H1-Tauri ALMA Partnership et al. [2015].

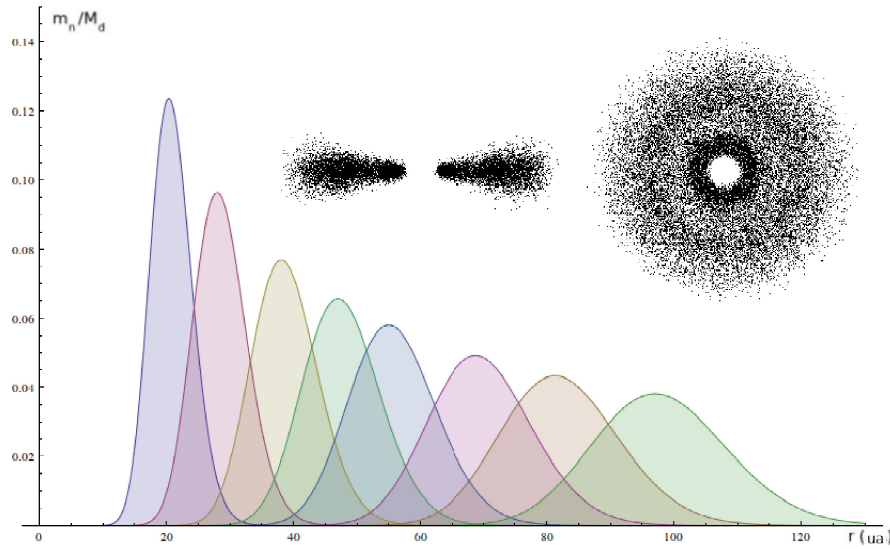


Figura 3.15: Función de distribución radial $R_n(r)$ de H1-Tauri y la vista de un corte transversal y cenital del disco protoplanetario.

Capítulo 4

Proceso de simulación

Para simular el disco protoplanetario HL-Tauri, partimos de los valores de los semiejes mayores de los anillos brillantes: $a_o = 20.4, 38.1, 47, 55, 68.8, 81.3, 97$ (ua) [ALMA Partnership et al., 2015]. En la ecuación $a_o = a_n n^2$, el parámetro a_n depende de la masa de la estrella en el momento que se formó el anillo, consideramos que los anillos se formaron simultáneamente, por lo cual solo existe un único valor para $a_n = a_s$, donde a_s es un parámetro libre desconocido y los números de órbita, n . Como el valor para el Sistema Solar es $a_s \simeq 0.03$ ua y se considera que la estrella de HL-Tauri tiene una masa de $M_s = 1.7 M_\odot$ [Pinte et al., 2016], proponemos una serie de posibles valores ($0.04 \leq k a_s \leq 0.06$) ua, con un barrido descendente de 10^{-5} ua, donde $k = M_s/M_\odot$.

Para cada uno de estos valores se calcula el número de órbita para cada uno de los anillos con $n = \text{Int} \left[\sqrt{a_o/a_s} \right]$ y se selecciona el valor más cercano al valor observado entre los tres valores: $a = a_s(n \pm 1)^2$, $a = a_s n^2$. En síntesis, con el valor conocido a_o se propone un valor a_s con el cual se determina los números de órbita n . Para cada uno de los valores a_s , se realiza un ajuste por mínimos cuadrados a la ecuación $a = a_s n^2$, en donde a_s es el parámetro a determinar. De esta manera, obtenemos el valor $a_s = \bar{a}_s \pm e_s$ donde \bar{a}_s es el promedio y e_s su dispersión (error); adicionalmente, se obtiene el coeficiente de correlación $0 \leq R^2 \leq 1$, el chi-cuadrado por grado de libertad χ_{DoF}^2 y la bondad de ajuste (likelihood): $0 \leq e^{-\chi_{DoF}^2} \leq 1$. El likelihood máximo se usa como criterio para seleccionar el mejor valor de a_s . Los resultados se muestran en el Cuadro 4.1.

Para el disco de transición DoAr44, $M_s = 1.3 M_\odot$, $R_s = 1.75 R_\odot$, $M_d = 0.005 M_\odot$ y el toroide se encuentra entre 32 y 60 ua [van der Marel et al., 2016]. Se sigue el mismo procedimiento anterior, usando como criterio, para seleccionar el mejor valor a_s , el error porcentual menor: $e_s = 100 |a_s - a_o| / a_o$.

Tabla 4.1: Valores de n y a obtenidos HL-Tauri

<i>Toroide</i>	a_o (ua)	n	$a = a_s n^2$ (ua)
B1	20.4	20	21.1
B2	38.1	27	38.5
B3	47	30	47.6
B4	55	32	54.1
B5	68.8	36	68.5
B6	81.3	39	80.4
B7	97	43	97.8
$a_s = (5.28746 \pm 0.02339) \times 10^{-2}$ (ua)			
$\chi^2_{DoF} = 0.54503$ $R^2 = 0.99921$			

4.1. La distribución radial y angular

La función $(m_n/M_d)R_n(r)Y_n(\theta, \phi)$ se representa computacionalmente como $e_n R_n(r) f_n Y_n(\theta, \phi)$ donde e_n y f_n es un factor de escala que corresponde a las alturas máximas de la distribución, las cuales, a su vez, dependen del número de partículas que se encuentran aleatoriamente distribuidas bajo la curva como se muestra a la derecha de la Figura 4.1. El dominio de la función de distribución, $R_n(r)$, es $0 < r < r_{ext}$ (ua), el cual dividimos en N_r intervalos: $1 \leq i \leq N_r$, cada división tiene un ancho, $h_r = r_{max}/N_r$. La altura de la i -ésima división se calcula promediando las dos alturas del intervalo $R(i) = \frac{1}{2} (R_n[(i-1)h_r] + R_n[ih_r])$. Se genera un radio aleatorio entre $0 < r \leq r_{max}$ y se ubica en la i -ésima división a la cual pertenece, siempre y cuando los puntos contenidos en la división sean menores a $R(i)$, de tal manera que se termina el llenado bajo la curva de la Figura 4.1 con cierto número de puntos. Los puntos se ubican en un ángulo $0 \leq \phi < 2\pi$ aleatorio, obteniéndose el toroide sobre el plano XY . La simetría axial está dada por el ángulo ϕ que ya lo tuvimos en cuenta al proyectar el toroide en el plano XY . Esta función de distribución podemos representarla con un sistema de partículas distribuidas en el espacio como se ilustra en la Figura 4.1.

El dominio de la función de distribución angular $Y_n(\theta, 0)$ es $0 < \theta \leq \pi$, el cual dividimos en $N_\theta = N_r \pi / r_{max}$ intervalos: $1 \leq i \leq N_\theta$, cada división tiene un ancho, $h_\theta = \pi / N_\theta$. La altura de la i -ésima división se calcula mediante: $Y(i) = \frac{1}{2} (Y_n[(i-1)h_\theta] + Y_n[ih_\theta])$. Se genera un ángulo aleatorio entre $0 < \theta \leq \pi$ y se ubica en la i -ésima división a la cual pertenece, siempre y cuando los puntos contenidos en la división sean menores a $Y(i)$, de tal manera que se termina el llenado bajo la curva de la Figura 4.1 con cierto número de puntos. Los puntos se ubican a lo largo del eje z a partir de su posición XY obtenida anteriormente con la distribución radial.

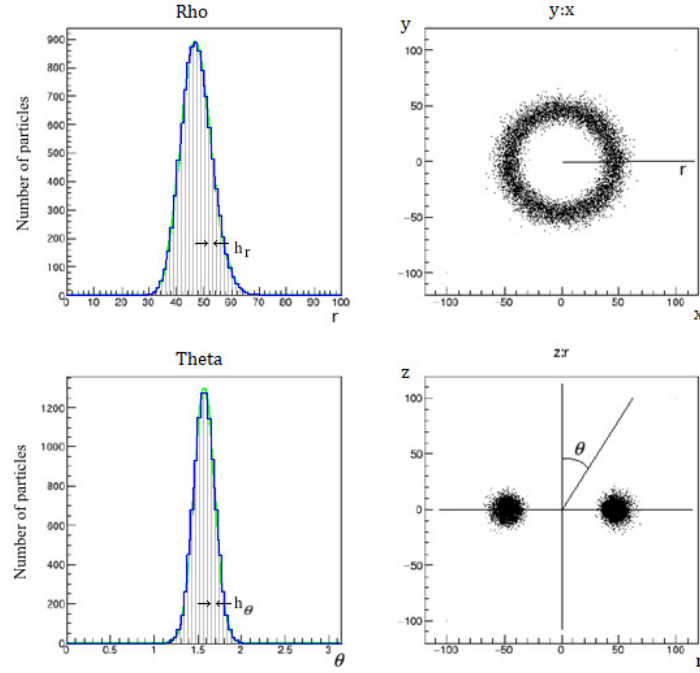


Figura 4.1: Función de distribución $R_n(r)Y_n(\theta, \phi)$ de DoAr44 y su representación como un sistema de partículas.

Finalmente, tenemos el radio $0 < r \leq r_{max}$, los ángulos $0 \leq \theta < \pi$ y $0 \leq \phi < 2\pi$, con los cuales podemos determinar la posición de las partículas en el sistema de coordenadas cartesianas XYZ :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

La magnitud de la velocidad de las partículas, v_o , se determina a partir de las fuerzas opuestas: la fuerza gravitacional contra la fuerza centrípeta ($-m d\Phi(r)/dr|_{r=a} \sin \theta - mv^2/a \sin \theta = 0$):

$$v_o = \sqrt{-a \frac{d\Phi(r)}{dr} \Big|_{r=a}} \sin \theta, \tag{4.2}$$

donde $\Phi(r)$ es el potencial bajo el cual se encuentran sometidas las partículas. En nuestro caso,

$$\frac{GM_s m}{a^2} = m \frac{v_o^2}{a}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{GM_s}{a}}$$

donde a es el semieje de la órbita. Las velocidades en el espacio se obtienen derivando las posiciones de las partículas, ecuación (4.1), son:

$$\begin{aligned} v_x &= -v_o \sin \theta \sin \phi \\ v_y &= v_o \sin \theta \cos \phi \\ v_z &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

El disco HI-Tauri consiste de una serie de toroides con una masa que depende del número de número de partículas existentes en cada una de las distribuciones radiales. Las masas de cada toroide se obtuvieron de [van der Marel et al., 2016] $m_n = 47, 53, 30, 62, 7, 101, 123 M_\oplus$. En la Figura se ilustra la función de distribución radial y la distribución de partículas correspondiente. A diferencia de otros modelos, la formación de cuerpos planetarios es más rápida y genera órbitas estables y cerradas [Poveda T. et al., 2015].

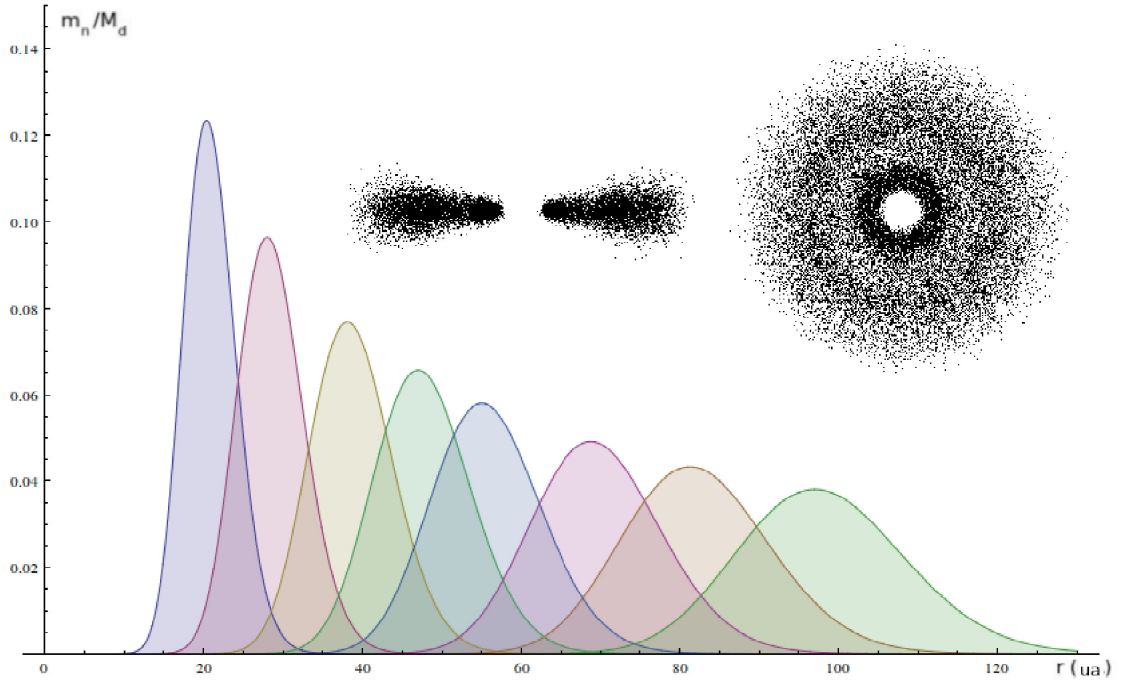


Figura 4.2: Función de distribución $R_n(r)$ de HI-Tauri y su representación como un sistema de partículas.

4.2. Inclínación del disco

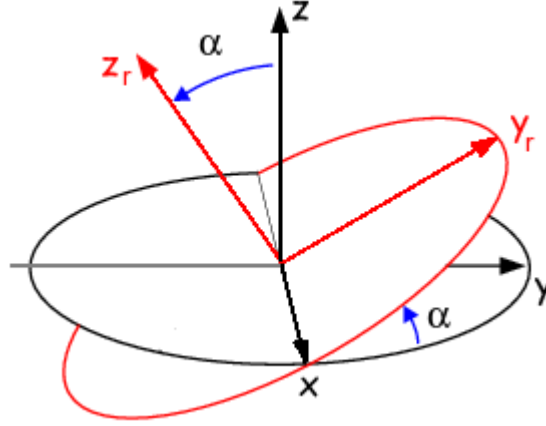


Figura 4.3: Rotación alrededor del eje x.

La inclinación del disco se obtiene mediante la transformación de coordenadas (rotación alrededor del eje x):

$$\begin{aligned} y_r &= y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ z_r &= y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde α es el ángulo de inclinación del disco, (y_r, z_r) son las coordenadas (y, z) rotadas. Se realiza la misma transformación para las velocidades:

$$\begin{aligned} v_{yr} &= v_y \cos \alpha - v_z \sin \alpha \\ v_{zr} &= v_y \sin \alpha + v_z \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde (v_{yr}, v_{zr}) son las velocidades (v_y, v_z) rotadas.

4.3. Proceso de colisión

Cada una de las partículas se considera como una esfera cuyo radio es la mitad de la distancia mínima existente entre las partículas de la distribución, esto se hizo con la finalidad de acelerar la simulación. Inicialmente, se examina que no haya solapamiento entre los radios y las direcciones de las velocidades deben ser opuestas para que exista la colisión; si se dan estas condiciones se suprime la segunda partícula, disminuyendo el número de partículas de la simulación en una, esto hace que la velocidad de la simulación aumente dependiendo de la frecuencia de las colisiones. La partícula resultante cumple con la ley de conservación de la masa, volumen y momentum de las partículas que colisionaron.

5.1. Determinación del radio mínimo

Para obtener el nombre, radio orbital, excentricidad, inclinación orbital de los objetos que componen el Sistema Solar se han utilizado los datos de la NASA JPL Small-Body Database, se tienen 638,092 objetos entre los cuales están los ocho planetas (Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno) y seis planetas enanos reconocidos por la IAU (Ceres, Plutón, Eris, Makemake, Haumea y Sedna), el resto de objetos son posibles planetas enanos y asteroides, se han excluido los cometas o asteroides con órbitas hiperbólicas o parabólicas. Inicialmente debemos seleccionar los objetos que participaron en el proceso de formación planetaria, la base no contiene todas las masas de los objetos por lo cual se ha utilizado su diámetro. Para un radio promedio de ~ 300 km, las lunas heladas, y asteroides rocosos de nuestro Sistema Solar transitan desde una forma de patata redondeada a una esfera [Lineweaver and Norman, 2010], por esta razón, se han seleccionado los objetos con un diámetro mayor a Vesta $\geq 525,4$ km, los objetos más pequeños se descartan porque pueden cambiar de órbita debido a colisiones o por procesos dinámicos internos (efecto Yarkovsky), es decir, pueden tener órbitas abiertas o inestables. En la Figura 5.1 se observa el diámetro de los objetos y la máxima bondad de ajuste del radio orbital observado a_o al teórico a_t (likelihood máximo definido como $\exp[-\chi^2_{DoF}]$), se observa que para valores menores a 600 km el likelihood máximo decae rápidamente, lo que muestra que la consideración realizada es correcta. No tiene sentido examinar los valores menores a 0,6 de la bondad de ajuste, por esta razón no se muestran en la Figura 5.1.

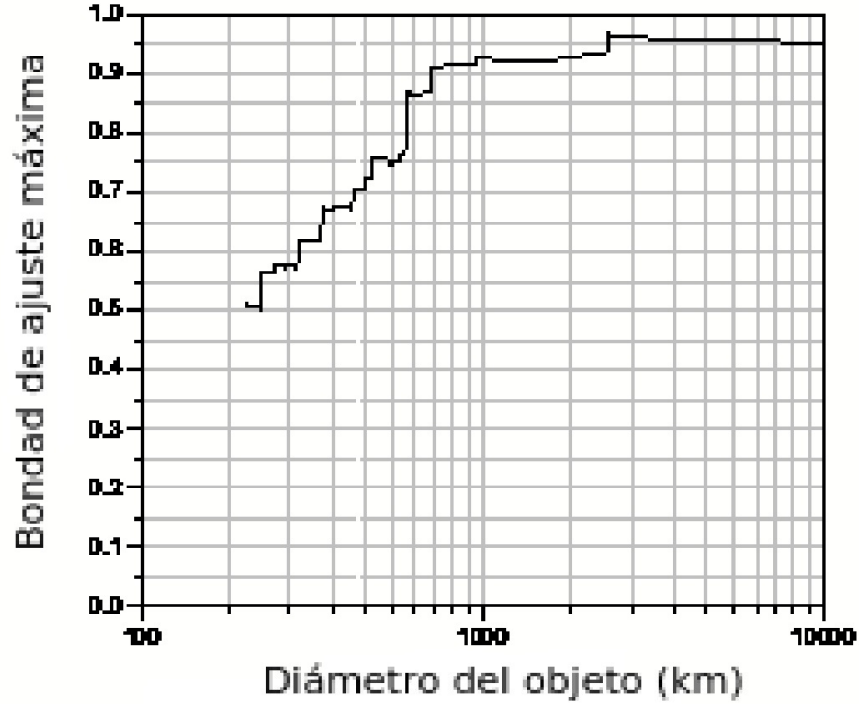


Figura 5.1: Bondad de ajuste máxima para cada diámetro del objeto (km).

En los orígenes del Sistema Solar, la formación de objetos mediante el proceso de acreción de planetesimales puede darse en cualquier lugar del disco protoplanetario, pero las órbitas cerradas y estables darán lugar a objetos de mayor tamaño, según el modelo estadístico, esto ocurre en $a_t = a_s n^2$.

5.2. Radio, energía y momentum angular orbital

Mediante $n \simeq \sqrt{a_o/a_\odot}$ se asigna un número de órbita a cada objeto y se selecciona el de mayor diámetro (Figura 5.2):

El llenado de las órbitas depende fundamentalmente de la masa de la estrella y de la cantidad de materia disponible en el disco protoplanetario. Se obtiene el valor del semieje mayor observado: $a_\odot^o = (2,92007 \pm 0,00256) \times 10^{-2}$ ua, $\chi_{DoF}^2 = 0,30574$, $R^2 = 0,99997$. Nótese que el radio teórico (a_t) depende de n , ecuación (3.10).

Tabla 5.1: Radio orbital observado a_o (NASA JPL Small-Body Database) y teórico calculado a_t

n	Nombre del Objeto	a_o (ua)	a_t (ua)
4	Mercury	0,387098	0,4683280
5	Venus	0,723321	0,7317625
6	Earth	1,000000	1,0537380
7	Mars	1,523712	1,4342545
9	4 Vesta	2,361793	2,3709105
10	1 Ceres	2,767506	2,927050
13	Jupiter	5,202480	4,9467145
18	Saturn	9,541499	9,4836420
26	Uranus	19,187979	19,7868580
32	Neptune	30,069528	29,9729920
36	78799 (2002 XW93)	37,606529	37,9345680
37	134340 Pluto	39,445070	40,0713145
38	136108 Haumea (2003 EL61)	43,217591	42,2666020
39	(2010 KZ39)	45,157027	44,5204305
40	136472 Makemake (2005 FY9)	45,714627	46,8328000
41	(2013 FZ27)	48,358353	49,2037105
42	42301 (2001 UR163)	51,468261	51,6331620
44	84522 (2002 TC302)	55,469714	56,6676880
45	(2013 FY27)	59,615239	59,2727625
46	(2010 RE64)	62,434903	61,9363780
48	136199 Eris (2003 UB313)	67,780812	67,4392320
50	229762 (2007 UK126)	74,007907	73,1762500
56	145451 (2005 RM43)	91,098029	91,7922880
58	(2008 ST291)	98,679103	98,4659620
95	(2012 VP113)	263,119381	264,1662625
134	90377 Sedna (2003 VB12)	524,394596	525,5810980

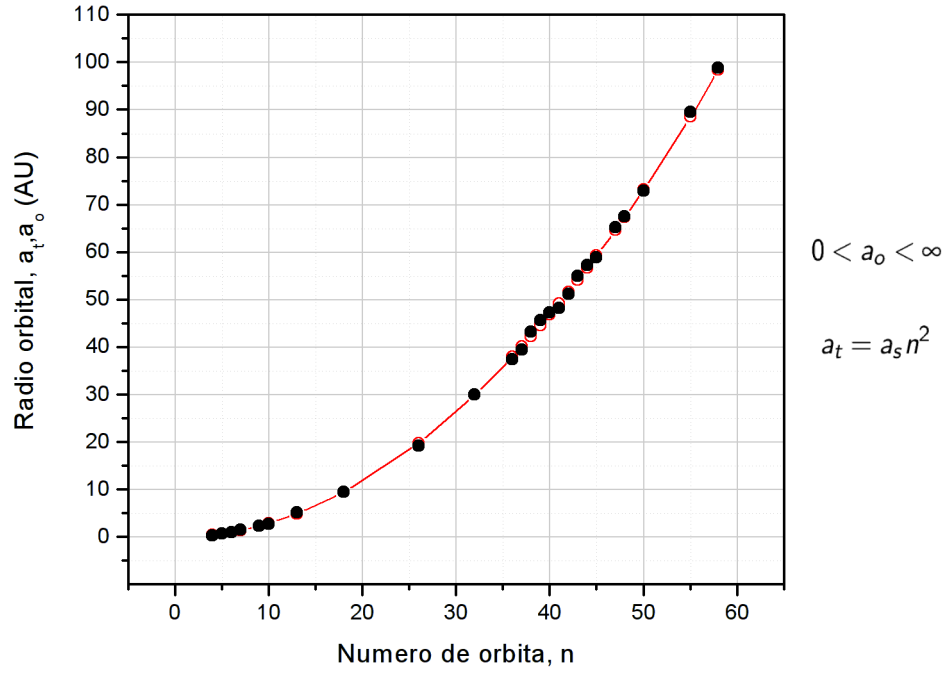


Figura 5.2: Radio orbital de los planetas del Sistema Solar: teórico a_t (línea continua) y observado a_o (círculos).

En la Figura 5.3 se muestra la relación entre la energía teórica E_t y el radio teórico calculado a_t (línea roja). Y la energía observada E_o y el radio orbital observado a_o (círculos negros). Una vez se han formado los objetos interiores su radio orbital se mantiene, mientras que los objetos en el continuo de energía (≥ 30 ua) se pueden desplazar fácilmente dando origen al cinturón de Kuiper. Júpiter está en el punto de inflexión. Se obtiene $E_{\odot}^o/m = (14,65188 \pm 0,00160)$ GJ/kg, $\chi_{DoF}^2 = 0,00002$, $R^2 = 0,99956$. A su vez, el grado de ajuste, es evidencia de inclinaciones del momentum angular privilegiados, es decir, la cuantización de la inclinación orbital, en el período de formación del Sistema Solar.

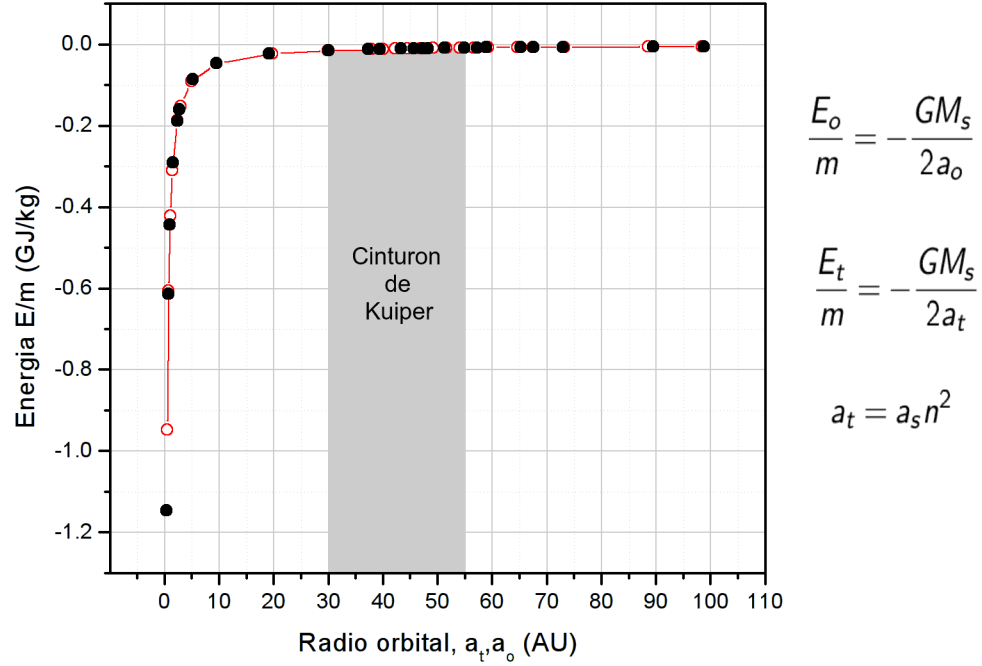


Figura 5.3: Energía de los planetas del Sistema Solar: teórica E_t (línea continua), observada E_o (círculos grises) y corregida E_c (círculos negros).

En la Figura 5.4 se tiene el momentum angular teórico, $L_t/m = \sqrt{GM_s a_t} \sqrt{1 - \epsilon_t^2} \cos \theta_t$, el cual depende de la excentricidad, con respecto al radio orbital teórico calculado a_t (línea roja). El momentum angular observado, $L_o/m = \sqrt{GM_s a_o} \sqrt{1 - \epsilon_o^2} \cos \theta_o$, con respecto al radio orbital observado a_o (círculos negros). Existe una negociación entre la inclinación orbital y la excentricidad, la diferencia entre el valor teórico y el observado que se muestra en la Figura 5.4, se debe al efecto Kozai-Lidov [Kozai, 1962]. Los objetos muy alejados del Sol presentan inclinaciones orbitales muy elevadas, esto genera una variación en la excentricidad orbital (ΔE_e), la cual a su vez produce un comportamiento anómalo en el momentum angular. Suprimiendo el efecto que tiene la inclinación orbital sobre la excentricidad, podemos obtener un momentum angular corregido: $L_c/m = \sqrt{GM_s r_o} \sqrt{1 - \epsilon_o^2} \cos \theta_o$, se obtiene: $\hbar_{\odot}^o/m = (0,76144 \pm 0,00081)$ PJs/kg, $\chi_{Dof}^2 = 0,03682$, $R^2 = 0,99992$.

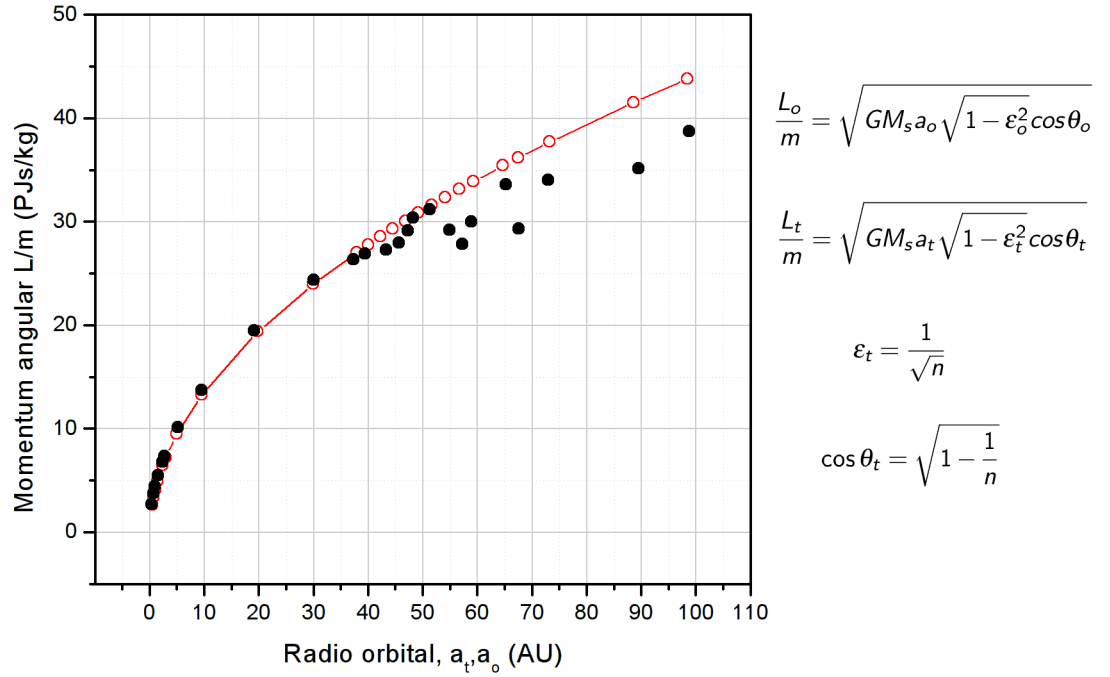


Figura 5.4: Momentum angular orbital de los planetas del Sistema Solar: teórico L_t/m (línea continua), observado L_o/m (círculos grises) y corregido L_c/m (círculos negros).

Para los números de órbita $n = 1, 2, 3$ se tiene una distribución de materia en forma de toroides concéntricos, los cuales tienen diferentes grados de inclinación y velocidad orbital, la inexistencia de planetas en los números de órbita $n = 1, 2, 3$ indica que la materia fue capturada por el Sol, esto podría explicar la inclinación de su eje de rotación, la rotación diferencial y porqué el momentum angular del Sol corresponde solamente al $\sim 2\%$ de todo el Sistema Solar.

5.3. Migración orbital

En la sección anterior se ha mostrado la situación actual del Sistema Solar, pero los planetas tenían una distribución distinta cuando se formaron: Consideramos que la secuencia de los planetas interiores era, (4) Mercurio, (5) Venus, (6) Tierra, (7) Marte, (8) Vesta y (9) Ceres. Los planetas jovianos tiene la secuencia propuesta por Tsiganis et al. [2005]. Obtenemos la bondad de ajuste máxima (maximum likelihood) de la posición de los objetos dependiendo del parámetro a_s y descartamos las regiones donde no se encuentren los planetas y planetas enanos más significativos existentes en el sistema actual, ver Figura 5.5.

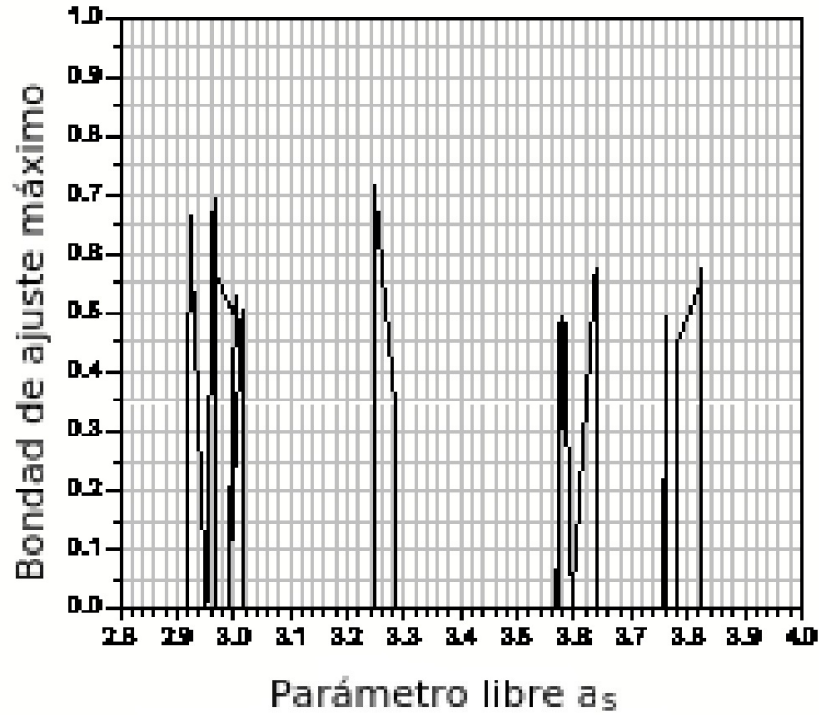


Figura 5.5: Bondad de ajuste máxima con respecto al parámetro a_s .

Basados en el valor máximo de a_s obtenemos la siguiente secuencia: Tabla 5.2, esa situación no es la misma en la cual se formaron los planetas, el sol inicialmente tenía una masa de $M_s \simeq 1,1 M_\odot$, es decir, la masa del sol ha decrecido [Boothroyd et al., 1991]. Para el Sistema Solar tenemos cuatro planetas en secuencia: (4) Mercurio, (5) Venus, (6) Tierra (7) Marte y (8) Vesta (9) Ceres, se asume que el número de la secuencia debe mantenerse.

Obtenemos el valor del parámetro observado: $a_s^o = (3,25115 \pm 0,00293) \times 10^{-2}$ ua, $\chi_{DoF}^2 = 0,33065$, $R^2 = 0,99997$.

5.4. Satélites

Se han tomado los satélites, de los planetas del Sistema Solar (Planetary Satellite Physical Parameters, JPL, NASA), con diámetros ≥ 350 km. Con la finalidad de poder comparar con el Sistema Solar, se ha tomado la razón entre el radio orbital y el factor de escalamiento (a_o/k). Mediante el mismo procedimiento utilizado para el sistema solar se obtiene: (10:J) Io, (12:S) Mimas, (13:J) Europa, (14:S) Enceladus, (15:S) Tethys, (16:J) Ganymede, (17:S) Dione, (21:S) Rhea, (21:J) Callisto, (23:N) Proteus, (31:S) Titan, (32:U) Ariel, (37:U) Umbriel, (48:U) Titania, (53:S) Iapetus, (55:U) Oberon, (171:E) Moon. Se ha excluido (40:N) Triton porque su comportamiento anómalo, con respecto al modelo, evidencia que es un objeto

Tabla 5.2: Radio (a_o , a_t), excentricidad (ϵ_t) e inclinación orbital (θ_t)

n	Nombre del Objeto	a_o (ua)	a_t (ua)	ϵ_t	θ_t
4	Mercury	0,38710	0,52019	0,50000	30,00000
5	Venus	0,72332	0,81279	0,44721	26,56505
6	Earth	1,00000	1,17042	0,40825	24,09484
7	Mars	1,52371	1,59307	0,37796	22,20765
8	4 Vesta	2,36179	2,08074	0,35355	20,70481
9	1 Ceres	2,76751	2,63344	0,33333	19,47122
13	Jupiter	5,45000	5,49446	0,27735	16,10211
16	Saturn	8,65000	8,32297	0,25000	14,47751
19	Neptune	13,00000	13,00464	0,22361	12,92097
22	Uranus	17,00000	17,19864	0,20851	12,03531
34	78799 (2002 XW93)	37,60653	37,58341	0,17150	9,87496
35	Pluto	39,44507	39,82671	0,16903	9,73148
36	Haumea	43,21759	42,13503	0,16667	9,59407
37	Makemake	45,71463	44,50838	0,16440	9,46232
38	55565 (2002 AW197)	47,50747	46,94675	0,16222	9,33586
39	(2010 RF43)	49,26428	49,45014	0,16013	9,21433
40	42301 (2001 UR163)	51,46826	52,01856	0,15811	9,09744
41	84522 (2002 TC302)	55,46971	54,65200	0,15617	8,98488
42	(2004 XR190)	57,70678	57,35046	0,15430	8,87640
43	(2013 FY27)	59,61524	60,11395	0,15250	8,77175
44	(2010 RE64)	62,43490	62,94246	0,15076	8,67072
45	225088 (2007 OR10)	66,84727	65,83599	0,14907	8,57310
46	Eris	67,78081	68,79455	0,14744	8,47871
48	229762 (2007 UK126)	74,00791	74,90673	0,14434	8,29892
53	145451 (2005 RM43)	91,09803	91,32508	0,13736	7,89514
55	(2008 ST291)	98,67910	98,34759	0,13484	7,74937
90	(2012 VP113)	263,11938	263,34396	0,10541	6,05075
127	Sedna	524,39460	524,37960	0,08874	5,09087

capturado por Neptuno. Los valores obtenidos para los parámetros observados son: $a_{\odot}^o = (2,92645 \pm 0,00173) \times 10^{-2}$ ua, $\chi_{DoF}^2 = 0,26477$, $R^2 = 0,99999$, Ver Figura 5.6. Se obtiene: $h_{\odot}^o/m = (0,76581 \pm 0,00185)$ PJs/kg, $\chi_{DoF}^2 = 0,14702$, $R^2 = 0,99982$, ; $E_{\odot}^o/m = (15,11796 \pm 0,02155)$ GJ/kg, $\chi_{DoF}^2 = 1,268 \times 10^{-7}$, $R^2 = 0,99993$.

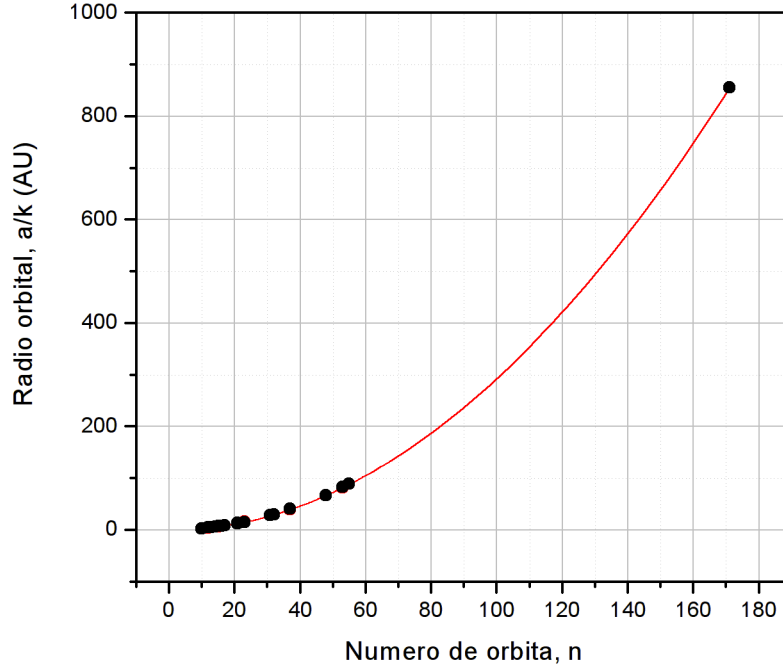


Figura 5.6: Radio orbital de los satélites del Sistema Solar: teórico a_t (línea continua) y observado a_o (círculos).

Distribución de masa de HL-Tauri

Una imagen reciente de ALMA del disco protoplanetario que rodea a la estrella HL-Tau, muestra que el disco está formado por varios anillos concéntricos luminosos, separados por gapsALMA Partnership et al. [2015]. Existe la hipótesis de que estos gaps se deben a la presencia de planetas, pero existen algunas dificultades con esta interpretación: Los planetas se encuentran demasiado cerca, generando inestabilidad orbital, y no deberían existir procesos de formación planetaria tan avanzados, debido a que la estrella es demasiado joven. En este trabajo se muestra que los gaps son un efecto de la distribución de materia del disco. En la mayoría de modelos se asume que el disco consiste de una distribución continua de materia y gas, sin embargo, por efecto de resonancia orbital, el disco tiene una estructura interna: es una superposición de funciones de distribución que dan origen a la forma característica del disco. Se obtiene la distribución de masa, y se hace un estudio preliminar de las órbitas, encontrando que son estables.

6.1. El Disco HL-Tauri

En el año 2014 el equipo de ALMA mostró una imagen (Figura 6.1) de la estrella HL-Tau (J2000 04:31:38.45 18:13:9.0), producto de la emisión del continuo en la banda 6 (211-275 GHz). En la imagen se observan varios anillos concéntricos: son anillos de gas y polvo emitiendo radiación los cuales están separados por un gap (zona oscura), la cual se debe a la existencia de un planeta lo suficientemente masivo para capturar la materia que se encuentra a su alrededor [Kwon et al., 2011].

Pero existen dificultades con esta interpretación, ya que la existencia de los gaps implica fenómenos de resonancia orbital que conducen a órbitas estables, por ejemplo, es suficiente que dos planetas se encuentren alejados a más de $3.5 R_H$ (radios de Hill) [Barnes and Greenberg, 2006], sin embargo, los gaps se encuentran demasiado cerca el uno del otro, implicando la interacción de los planetas entre sí, generando una inestabilidad orbital la cual terminaría destruyendo los gaps observados. Se hizo un intento de explicar la existencia de órbitas estables de planetas muy cercanos, con la ayuda del disco protoplanetario [Barnes and Greenberg, 2006], pero sin el proceso de migración orbital, finalmente, el sistema se vuelve inestable; las

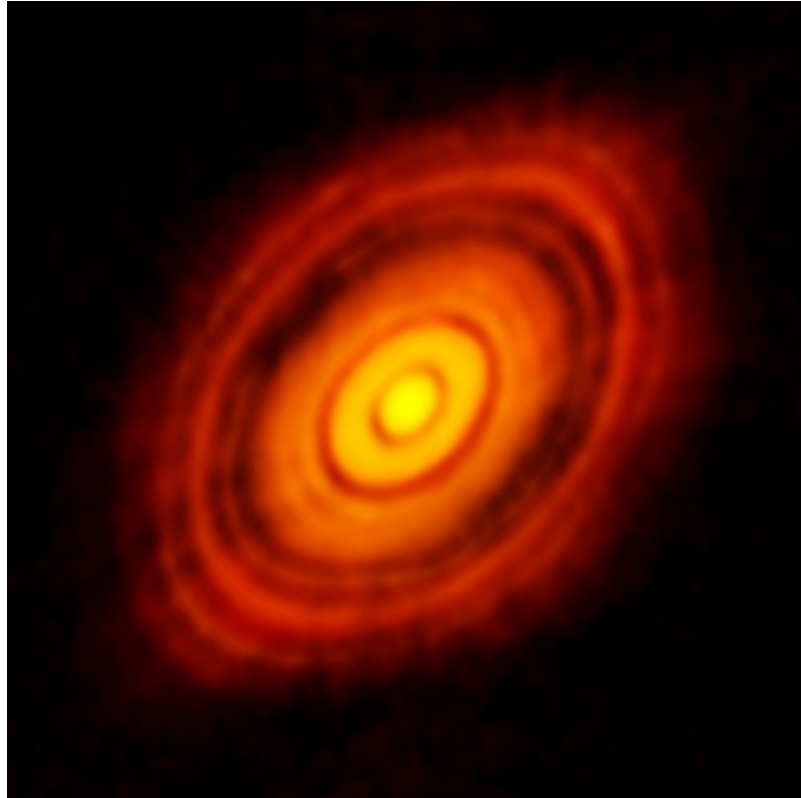


Figura 6.1: Disco protoplanetario alrededor de la estrella HL-Tau, la imagen muestra varios anillos concéntricos de gas y polvo emitiendo radiación los cuales están separados por un gap (zona oscura) (Figura tomada de ALMA Partnership et al. 2015).

simulaciones no muestran cómo podría ocurrir esta situación. Además, no debe haber procesos de formación planetaria tan avanzada, porque la estrella es muy joven, lo que implica que todos los modelos de formación planetaria están equivocados.

En la mayoría de modelos se considera que el disco protoplanetario está formado por una distribución de materia continua, la cual a medida que rota alrededor de la estrella, adquiere una dinámica (estable y/o turbulenta) de manera tal que origina los planetas mediante un proceso de acreción de planetesimales.

Se propone que el disco protoplanetario tiene una estructura interna definida, lo que da lugar a anillos y brechas observadas en el sistema HL-Tau y otros sistemas protoplanetarios. La estructura interna se origina a partir de la existencia de fenómenos de resonancia orbital del sistema, lo que da lugar a una serie de toroides concéntricos superpuestos que dan forma al disco.

6.2. Distribución de planetesimales

La distribución de materia del disco, a lo largo del radio $0 < r \leq R_0$ (ua), da origen a la estructura de anillos, mediante una superposición de funciones base, dadas por:

$$\rho(r, \theta) = \sum_n m_n R_n(r) \Theta(\theta) \quad (6.1)$$

donde n es el número de órbitas estables y cerradas y m_n la masa contenida en cada elemento. La distribución radial de materia se describe con [Nottale et al., 1997],

$$R(r) = \left[\left(\frac{2}{na_s} \right)^{2n+1} \frac{1}{(2n)!} \right] r^{2n} e^{-2r/na_s} \quad (6.2)$$

siendo $a_s = ka_\odot$ el parámetro macroscópico, $k = M_s/M_\odot = 0,55$ [Sargent and Beckwith, 1991] y $a_\odot = 0,0292705$ [Poveda T. et al., 2015], ver Figura 6.2. La distribución cenital, Figura 6.2, es:

$$\Theta(\theta) = 2\pi \left| Y_{n-1}^{n-1}(\theta, \phi) \right|^2 \sin \theta. \quad (6.3)$$

6.3. Tratamiento de la fotografía

El radio estimado del disco protoplanetario de HL-Tau, en la imagen tomada por ALMA (ESO/NAOJ/NRAO), es de $R_0 = 117,5$ ua con una masa total $M_0 = 0,135 M_\odot$. Inicialmente se transformó la imagen de 1800×1800 píxeles a escala de grises, se hizo un barrido de $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$; donde se determinaron los ejes mayor (a) y menor (b) de las elipses mediante los puntos mínimos, los cuales se encuentran en $\phi = 45, 26, 134, 65, 225, 17, 315, 13$; se sabe que la separación debe ser de $n = (1, 3, 5, 7)$ veces 45° , mediante la relación ϕ/n obtenemos el ángulo de posición de la fotografía: $45,04898 \pm 0,07806$, dando origen a una imagen de 2546×2546 píxeles. Haciendo uso de la expresión para la elipticidad $\cos(\varphi) = b/a$, mediante el mínimo de la media del barrido se estableció un ángulo de inclinación de $\varphi = 46,82687^\circ$; obteniendo finalmente una imagen de 1622×1617 píxeles, (Figura 6.3).

En la imagen se realiza un barrido de $0^\circ \leq \phi < 360^\circ$, para cada $0 < R \leq R_0$ (ua), obteniendo un perfil de luminosidad-distancia, 6.4.

Para suprimir el efecto de aclarar el gas debido a la presencia de la estrella, se realiza una transformación luminosidad-densidad mediante la relación $\rho \simeq L^{3,5} - \exp(-r/12,84842) + 0,036446$, la cual depende de la variación de temperatura $T \sim r^{-0,43}$, obteniendo la distribución de la materia, $\rho(r, \pi/2)$ dada por la ecuación (6.1); el área bajo la curva corresponde a la masa del disco, Figura 6.5.

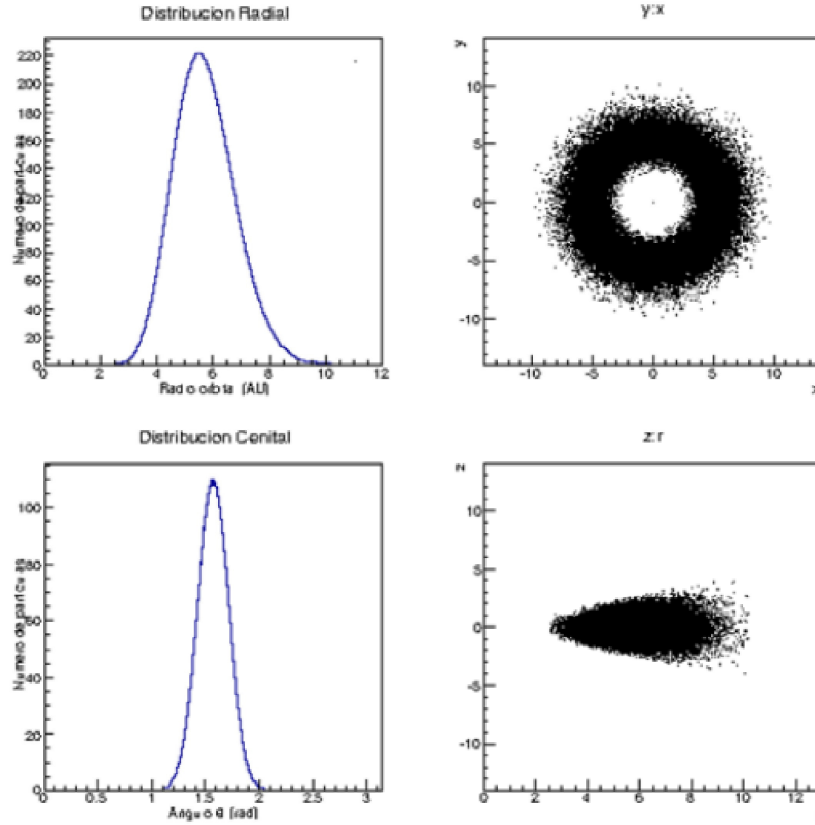


Figura 6.2: (a) Distribución radial y (b) cenital de masa [Poveda T. et al., 2015].

Se realiza un ajuste por mínimos cuadrados para obtener los términos de masa m_n en la ecuación (6.1). La línea roja corresponde al ajuste y las masas obtenidas en una simulación desarrollada por ordenador utilizando el algoritmo de Barnes-Hut con el integrador IAS15 de rebound [Rein and Liu, 2012], es que las órbitas son estables para tiempos extremadamente largos, en la Figura 6.6 se muestran las órbitas y el radio de los objetos. Los objetos principales están en 17,07, 20,77, 41,76, 75,98, 101,33 con masa $\gtrsim 1M_J$.

Los gaps observados en el disco protoplanetario HL-Tau no se deben a la existencia de planetas sino que es un efecto de la distribución de la materia en el disco, en este modelo el disco tiene una estructura discontinua como una serie de toroides concéntricos, en lugar de una distribución de materia continua. Las órbitas de los objetos obtenidos son estables.

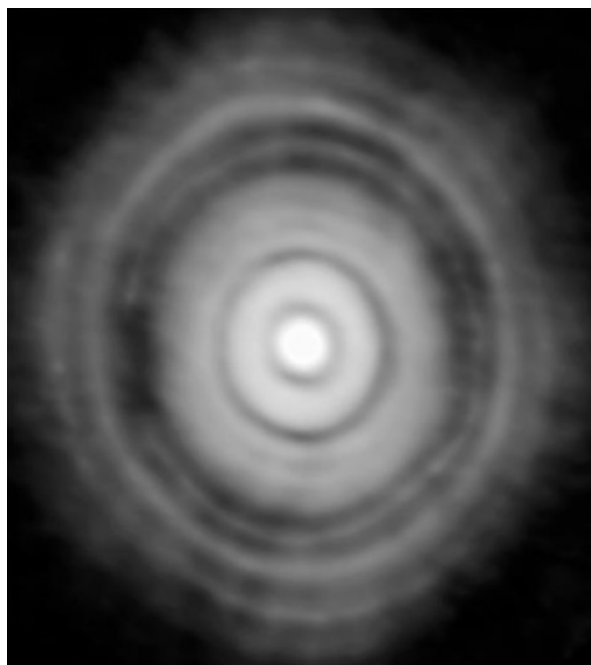


Figura 6.3: Imágen proyectada del disco protoplanetario

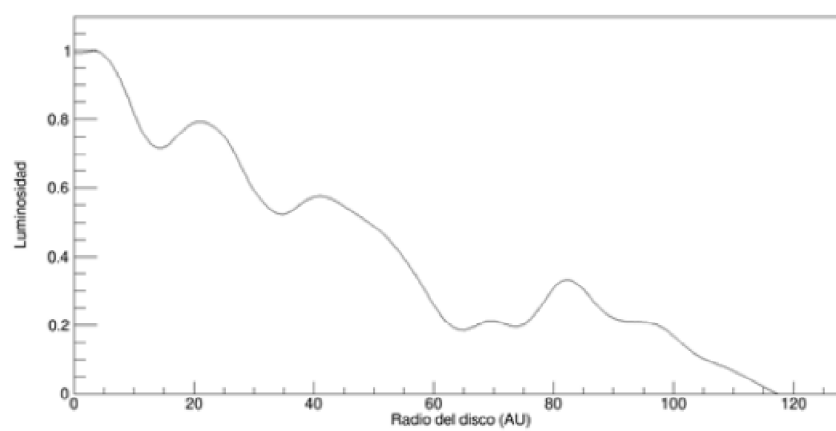


Figura 6.4: Perfil normalizado luminosidad - distancia.

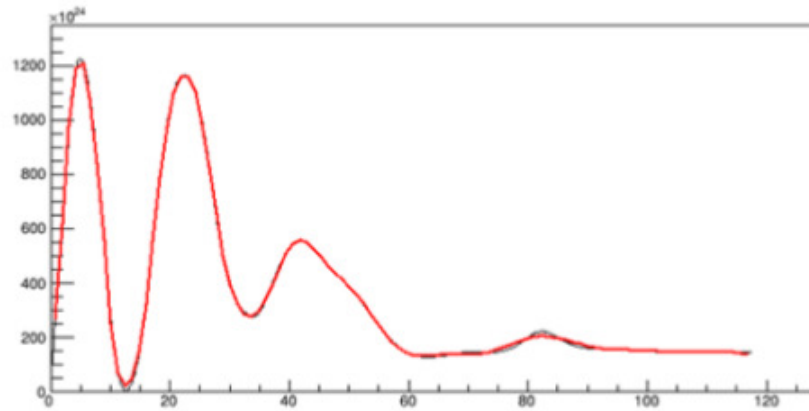


Figura 6.5: Perfil de densidad de materia con respecto a la distancia, donde se ha suprimido el efecto de la luminosidad de la estrella.

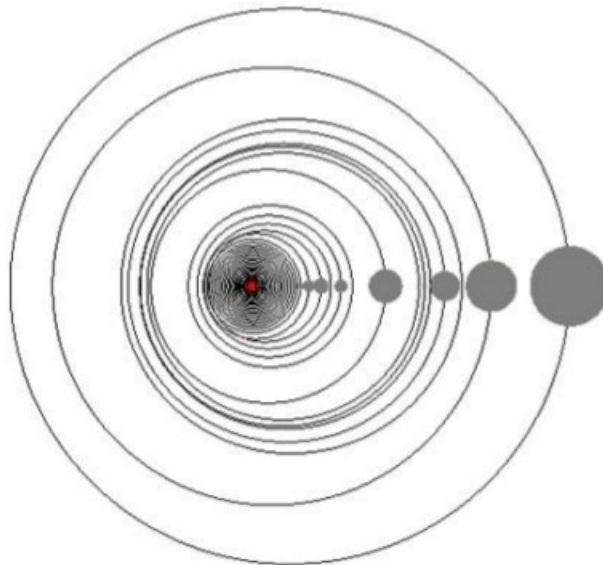


Figura 6.6: Órbitas y radio de Hill de los objetos obtenidos del proceso de acreción simulado computacionalmente.

Conclusiones

- El modelo estadístico obtenido puede ser usado como una herramienta para parametrizar y estudiar el proceso de formación de los sistemas planetarios.
- La dinámica está determinada solamente por la masa del objeto central (según el caso, estrella o planeta) independientemente, de la masa del objeto que la orbita.
- Los planetas y exoplanetas tienden a formarse a una distancia predeterminada la cual depende del parámetro a_n , el cual a su vez depende de la masa de la estrella.
- Cuando el parámetro libre a_n es el mismo para todas las órbitas $a_n = a_s$, las cantidades físicas (energía, radio, excentricidad, momentum angular e inclinación orbital), de los objetos del sistema planetario, toman un valor determinado, que depende del número de órbita.
- Actualmente se considera que el disco protoplanetario HL-Tau es un disco continuo donde los gaps se deben a planetas que capturan el gas y la materia existente a su alrededor; el problema que se presenta al realizar las simulaciones es que los objetos además de ser muy masivos tendrían órbitas inestables. Los gaps observados en el disco protoplanetario HL-Tau no se deben a la existencia de planetas sino que es un efecto de la distribución de la materia en el disco, en este modelo el disco tiene una estructura discontinua como una serie de toroides concéntricos, en lugar de una distribución de materia continua y los planetas se forman dentro de los toroides. Las simulaciones muestran que las órbitas de los objetos obtenidos son estables.

Referencias

- R. L. Akeson, X. Chen, D. Ciardi, M. Crane, J. Good, M. Harbut, E. Jackson, S. R. Kane, A. C. Laity, S. Leifer, M. Lynn, D. L. McElroy, M. Papin, P. Plavchan, S. V. Ramírez, R. Rey, K. von Braun, M. Wittman, M. Abajian, B. Ali, C. Beichman, A. Beekley, G. B. Berriman, S. Berukoff, G. Bryden, B. Chan, S. Groom, C. Lau, A. N. Payne, M. Regelson, M. Saucedo, M. Schmitz, J. Stauffer, P. Wyatt, and A. Zhang. The NASA Exoplanet Archive: Data and Tools for Exoplanet Research. *PASP*, 125:989, August 2013. doi: 10.1086/672273.
- ALMA Partnership, C. L. Brogan, L. M. Pérez, T. R. Hunter, W. R. F. Dent, A. S. Hales, R. E. Hills, S. Corder, E. B. Fomalont, C. Vlahakis, Y. Asaki, D. Barkats, A. Hirota, J. A. Hodge, C. M. V. Impellizzeri, R. Kneissl, E. Liuzzo, R. Lucas, N. Marcelino, S. Matsushita, K. Nakanishi, N. Phillips, A. M. S. Richards, I. Toledo, R. Aladro, D. Broguiere, J. R. Cortes, P. C. Cortes, D. Espada, F. Galarza, D. Garcia-Appadoo, L. Guzman-Ramirez, E. M. Humphreys, T. Jung, S. Kamenno, R. A. Laing, S. Leon, G. Marconi, A. Mignano, B. Nikolic, L.-A. Nyman, M. Radiszcz, A. Remijan, J. A. Rodón, T. Sawada, S. Takahashi, R. P. J. Tilanus, B. Vila Vilaro, L. C. Watson, T. Wiklind, E. Akiyama, E. Chapillon, I. de Gregorio-Monsalvo, J. Di Francesco, F. Gueth, A. Kawamura, C.-F. Lee, Q. Nguyen Luong, J. Mangum, V. Pietu, P. Sanhueza, K. Saigo, S. Takakuwa, C. Ubach, T. van Kempen, A. Wootten, A. Castro-Carrizo, H. Francke, J. Gallardo, J. Garcia, S. Gonzalez, T. Hill, T. Kaminski, Y. Kurono, H.-Y. Liu, C. Lopez, F. Morales, K. Plarre, G. Schieven, L. Testi, L. Videla, E. Villard, P. Andreani, J. E. Hibbard, and K. Tatematsu. The 2014 ALMA Long Baseline Campaign: First Results from High Angular Resolution Observations toward the HL Tau Region. *ApJl*, 808:L3, July 2015. doi: 10.1088/2041-8205/808/1/L3.
- S. M. Andrews, D. J. Wilner, C. Espaillat, A. M. Hughes, C. P. Dullemond, M. K. McClure, C. Qi, and J. M. Brown. Resolved Images of Large Cavities in Protoplanetary Transition Disks. *ApJl*, 732:42, May 2011. doi: 10.1088/0004-637X/732/1/42.
- P. J. Armitage. Dynamics of Protoplanetary Disks. *ARA&A*, 49:195–236, September 2011. doi: 10.1146/annurev-astro-081710-102521.

- G. Arreaga-García, S. Oreste-Topa, B. Pérez-Rendón, and L. Olguín-Ruiz. Efectos físicos del envolvente sobre el colapso gravitacional de un núcleo de gas. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, 8(1):183–189, 2014.
- M. Banit, M. A. Ruderman, J. Shaham, and J. H. Applegate. Formation of Planets around Pulsars. *ApJ*, 415:779, October 1993. doi: 10.1086/173201.
- R. Barnes and R. Greenberg. Stability Limits in Extrasolar Planetary Systems. *ApJ*, 647:L163–L166, August 2006. doi: 10.1086/507521.
- S. V. W. Beckwith, C. D. Koresko, A. I. Sargent, and D. A. Weintraub. Tomographic imaging of HL Tauri. *ApJ*, 343:393–399, August 1989. doi: 10.1086/167712.
- A. Berger. Milankovitch Theory and climate. *Reviews of Geophysics*, 26:624–657, November 1988. doi: 10.1029/RG026i004p00624.
- A. I. Boothroyd, I.-J. Sackmann, and W. A. Fowler. Our sun. II - Early mass loss of 0.1 solar mass and the case of the missing lithium. *ApJ*, 377:318–329, August 1991. doi: 10.1086/170361.
- A. P. Boss. Formation of Planetary-Mass Objects by Protostellar Collapse and Fragmentation. *ApJ*, 551:L167–L170, April 2001a. doi: 10.1086/320033.
- A. P. Boss. Gas Giant Protoplanet Formation: Disk Instability Models with Thermodynamics and Radiative Transfer. *ApJ*, 563:367–373, December 2001b. doi: 10.1086/323694.
- S. Bruderer. Survival of molecular gas in cavities of transition disks. I. CO. *A&A*, 559:A46, November 2013. doi: 10.1051/0004-6361/201321171.
- S. Bruderer, N. van der Marel, E. F. van Dishoeck, and T. A. van Kempen. Gas structure inside dust cavities of transition disks: Ophiuchus IRS 48 observed by ALMA. *A&A*, 562:A26, February 2014. doi: 10.1051/0004-6361/201322857.
- C. Carrasco-González, T. Henning, C. J. Chandler, H. Linz, L. Pérez, L. F. Rodríguez, R. Galván-Madrid, G. Anglada, T. Birnstiel, R. van Boekel, M. Flock, H. Klahr, E. Macias, K. Menten, M. Osorio, L. Testi, J. M. Torrelles, and Z. Zhu. The VLA View of the HL Tau Disk: Disk Mass, Grain Evolution, and Early Planet Formation. *ApJ*, 821:L16, April 2016. doi: 10.3847/2041-8205/821/1/L16.
- A. E. Caswell. *A Relation between the Mean Distances of the Planets from the Sun*, volume 69. American Association for the Advancement of Science, April 1929. URL <http://www.jstor.org/stable/1652791>.
- D. P. Cox. The Three-Phase Interstellar Medium Revisited. *ARA&A*, 43:337–385, September 2005. doi: 10.1146/annurev.astro.43.072103.150615.

- T. M. Dame, D. Hartmann, and P. Thaddeus. The Milky Way in Molecular Clouds: A New Complete CO Survey. *ApJ*, 547:792–813, February 2001. doi: 10.1086/318388.
- C. P. Dullemond, D. Hollenbach, I. Kamp, and P. D’Alessio. Models of the Structure and Evolution of Protoplanetary Disks. *Protostars and Planets V*, pages 555–572, 2007.
- H. Goldstein. *Mecánica clásica*, volume 1. Editorial Reverte S.A., 2a edition, 1994.
- L. Hartmann, N. Calvet, E. Gullbring, and P. D’Alessio. Accretion and the Evolution of T Tauri Disks. *ApJ*, 495:385–400, March 1998. doi: 10.1086/305277.
- Y. Kozai. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *AJ*, 67:591, November 1962. doi: 10.1086/108790.
- N. Kuno, N. Sato, H. Nakanishi, A. Hirota, T. Tosaki, Y. Shioya, K. Sorai, N. Nakai, K. Nishiyama, and B. Vila-Vilaró. Nobeyama CO Atlas of Nearby Spiral Galaxies: Distribution of Molecular Gas in Barred and Nonbarred Spiral Galaxies. *PASJ*, 59:117–166, February 2007. doi: 10.1093/pasj/59.1.117.
- W. Kwon, L. W. Looney, and L. G. Mundy. Resolving the Circumstellar Disk of HL Tauri at Millimeter Wavelengths. *ApJ*, 741:3, November 2011. doi: 10.1088/0004-637X/741/1/3.
- C. H. Lineweaver and M. Norman. The Potato Radius: a Lower Minimum Size for Dwarf Planets. *ArXiv e-prints*, April 2010.
- L. E. Lisiecki. Links between eccentricity forcing and the 100,000-year glacial cycle. *Nature Geoscience*, 3:349–352, May 2010. doi: 10.1038/ngeo828.
- J. J. Lissauer. Planet formation. *ARA&A*, 31:129–174, 1993. doi: 10.1146/annurev.aa.31.090193.001021.
- D. Lynden-Bell and J. E. Pringle. The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *MNRAS*, 168:603–637, September 1974. doi: 10.1093/mnras/168.3.603.
- S. Marino, S. Perez, and S. Casassus. Shadows Cast by a Warp in the HD 142527 Protoplanetary Disk. *ApJL*, 798:L44, January 2015. doi: 10.1088/2041-8205/798/2/L44.
- A. B. Men’shchikov, T. Henning, and O. Fischer. Self-consistent Model of the Dusty Torus around HL Tauri. *ApJ*, 519:257–278, July 1999. doi: 10.1086/307333.
- R. Mundt, T. Buehrke, J. Solf, T. P. Ray, and A. C. Raga. Optical jets and outflows in the HL Tauri region. *A&A*, 232:37–61, June 1990.

- M. M. Nieto. Conclusions about the titius bode law of planetary distances. *A&A*, 8:105, September 1970.
- L. Nottale, G. Schumacher, and J. Gay. Scale relativity and quantization of the solar system. *A&A*, 322:1018–1025, June 1997.
- M. R. Perez and C. A. Grady. Observational Overview of Young Intermediate-Mass Objects: Herbig Ae/Be Stars. *Space Sci. Rev.*, 82:407–450, November 1997. doi: 10.1023/A:1005064108523.
- C. Pinte, W. R. F. Dent, F. Ménard, A. Hales, T. Hill, P. Cortes, and I. de Gregorio-Monsalvo. Dust and Gas in the Disk of HL Tauri: Surface Density, Dust Settling, and Dust-to-gas Ratio. *ApJ*, 816:25, January 2016. doi: 10.3847/0004-637X/816/1/25.
- N. Poveda T., N. Vera-Villamizar., and N. Y. Buitrago C. Planetary systems based on a quantum-like model. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- H. Rein and S.-F. Liu. REBOUND: an open-source multi-purpose N-body code for collisional dynamics. *A&A*, 537:A128, January 2012. doi: 10.1051/0004-6361/201118085.
- T. S. Rice, A. A. Goodman, E. A. Bergin, C. Beaumont, and T. M. Dame. A Uniform Catalog of Molecular Clouds in the Milky Way. *ApJ*, 822:52, May 2016. doi: 10.3847/0004-637X/822/1/52.
- T. P. Robitaille, J. Rossa, D. J. Bomans, and R. P. van der Marel. The morphology of minor axis gaseous outflows in edge-on Seyfert galaxies. *A&A*, 464:541–552, March 2007. doi: 10.1051/0004-6361:20065454.
- A. I. Sargent and S. V. W. Beckwith. The molecular structure around HL Tauri. *ApJ*, 382:L31–L35, November 1991. doi: 10.1086/186207.
- I. W. Stephens, L. W. Looney, W. Kwon, M. Fernández-López, A. M. Hughes, L. G. Mundy, R. M. Crutcher, Z.-Y. Li, and R. Rao. Spatially resolved magnetic field structure in the disk of a T Tauri star. *Nature*, 514:597–599, October 2014. doi: 10.1038/nature13850.
- K. M. Strom, S. E. Strom, S. Edwards, S. Cabrit, and M. F. Skrutskie. Circumstellar material associated with solar-type pre-main-sequence stars - A possible constraint on the timescale for planet building. *AJ*, 97:1451–1470, May 1989. doi: 10.1086/115085.
- K. Tsiganis, R. Gomes, A. Morbidelli, and H. F. Levison. Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435:459–461, May 2005. doi: 10.1038/nature03539.

- N. van der Marel, E. F. van Dishoeck, S. Bruderer, L. Pérez, and A. Isella. Gas density drops inside dust cavities of transitional disks around young stars observed with ALMA. *A&A*, 579:A106, July 2015. doi: 10.1051/0004-6361/201525658.
- N. van der Marel, E. F. van Dishoeck, S. Bruderer, S. M. Andrews, K. M. Pontoppidan, G. J. Herczeg, T. van Kempen, and A. Miotello. Resolved gas cavities in transitional disks inferred from CO isotopologs with ALMA. *A&A*, 585:A58, January 2016. doi: 10.1051/0004-6361/201526988.
- J. P. Williams and L. A. Cieza. Protoplanetary Disks and Their Evolution. *ARA&A*, 49:67–117, September 2011. doi: 10.1146/annurev-astro-081710-102548.
- A. Wolszczan and D. A. Frail. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355:145–147, January 1992. doi: 10.1038/355145a0.
- H.-W. Yen, H. B. Liu, P.-G. Gu, N. Hirano, C.-F. Lee, E. Puspitaningrum, and S. Takakuwa. Gas Gaps in the Protoplanetary Disk around the Young Protostar HL Tau. *ApJ*, 820:L25, April 2016. doi: 10.3847/2041-8205/820/2/L25.

Anexo A

Distribución Gamma

La distribución Gamma es una función densidad dada por:

$$R(r) = \begin{cases} \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{\alpha-1} e^{-\lambda r} & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ son los parámetros de la distribución. Se basa en la función Gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (\text{A.1})$$

a cual es la extensión del concepto de factorial a los reales. Si $\alpha = 1$ la distribución Gamma se reduce a la función exponencial de parámetro λ . Inicialmente vamos a demostrar que es una función densidad.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(r) dr &= \int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{\alpha-1} e^{-\lambda r} dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} (r)^{\alpha-1} e^{-\lambda r} dr \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $y = \lambda r$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(r) dr &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{\lambda} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \end{aligned}$$

aplicando la ecuación (A.1) tenemos que:

$$\int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{\alpha-1} e^{-\lambda r} dr = 1$$

La función de distribución Gamma de una variable aleatoria es,

$$F(r) = \begin{cases} \int_0^r \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda u)^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases}$$

para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ la expresión se reduce a:

$$F(r) = \begin{cases} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda r)^k}{k!} e^{-\lambda r} & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases}$$

La esperanza de una variable aleatoria con esta distribución es:

$$E(r) = \int_{-\infty}^{\infty} r f(r) dr$$

$$\begin{aligned} E(r) &= \int_0^{\infty} r \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{\alpha-1} e^{-\lambda r} dr \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{(\alpha+1)-1} e^{-\lambda r} dr \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (\lambda r)^{(\alpha+1)-1} e^{-\lambda r} dr \end{aligned}$$

como el integrando es la distribución $Gamma(\alpha+1, \lambda)$ se convierte en uno y se tiene que $E(r) = \alpha/\lambda$.

De la misma forma demostraremos la varianza, calculando primero el segundo momento:

$$E(r^2) = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 f(r) dr$$

$$\begin{aligned} E(r^2) &= \int_0^{\infty} r^2 \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{\alpha-1} e^{-\lambda r} dr \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} \int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} (\lambda r)^{(\alpha+2)-1} e^{-\lambda r} dr \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} \int_0^{\infty} \lambda \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} (\lambda r)^{(\alpha+2)-1} e^{-\lambda r} dr \end{aligned}$$

como el integrando es la distribución $Gamma(\alpha+2, \lambda)$ se convierte en uno y se tiene que el segundo momento $E(r^2) = (\alpha+1)\alpha/\lambda^2$.

Ahora calcularemos la varianza:

$$\begin{aligned} Var(r) &= E(r^2) - E^2(r) \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha}{\lambda} \\ &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Puede demostrarse sin mucha dificultad que la función generadora toma la siguiente expresión:

$$M(t) = E(e^{tx}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha \quad \text{para valores reales} \quad t < \lambda$$

Relación entre la distribución Erlang y Poisson

El número de ocurrencias de un suceso en un intervalo de tiempo $(0, t)$ sigue una distribución de Poisson de parámetro λt si y sólo si el tiempo que transcurre hasta la n -ésima ocurrencia sigue una distribución de Erlang de parámetros n y λ .

Demostración

Sea X_t la variable que denota el número de ocurrencias de un suceso en un intervalo de tiempo $(0, t)$, y sea T_n la que contabiliza el tiempo que transcurre hasta la n -ésima ocurrencia de tal suceso.

En primer lugar vamos a relacionar las funciones de distribución de ambas variables.

Para ello, observemos que si el tiempo de espera hasta la n -ésima ocurrencia es menor o igual que un valor $t > 0$, necesariamente el número de sucesos que han tenido que ocurrir en el intervalo $(0, t)$ ha de ser al menos n . Así,

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = P(X_t \geq n) = 1 - F_{X_t}(n-1).$$

A partir de esta expresión podemos demostrar la caracterización dada en el enunciado.

$$\Rightarrow) \text{ Supongamos que } X_t \sim \mathcal{P}(\lambda t).$$

A partir de la relación anterior y considerando la expresión de la función de *distribución de la ley de Poisson*, la de la variable T_n queda en la forma

$$F_{T_n}(t) = 1 - F_{X_t}(n-1) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

a partir de la cual, derivando con respecto a t , se obtiene la función densidad de T_n ,

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \frac{k(\lambda t)^{k-1}}{k!} \right].$$

Por último, simplificamos la expresión anterior, obteniendo:

$$\begin{aligned} f_{T_n}(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{cambio } h = k - 1 \text{ en} \\ \text{la segunda suma} \end{array} \right] \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \sum_{h=0}^{n-2} \frac{(\lambda t)^h}{h!} \right] = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ f_{T_n}(t) &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la *función de densidad de la distribución Gamma*, se deduce que la variable T_n se distribuye como una $\Gamma(n, \lambda)$, y como $n \in \mathbb{N}$, se concluye que dicha distribución es la Erlang(n, λ).

\Rightarrow) Sea ahora $T_n \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$.

Razonando como en la implicación anterior, vamos a expresar ahora la función de distribución de X_t en términos de la de T_n .

Puesto que $F_{X_t}(n-1) = 1 - F_{T_n}(t)$, y teniendo en cuenta la función de densidad de la distribución de Erlang, podemos expresar la función de distribución de X_t de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F_{X_t}(n-1) &= 1 - F_{T_n}(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} ds = \left[\begin{array}{c} v = \lambda s \\ dv = \lambda ds \end{array} \right] \\ &= \int_{\lambda t}^{+\infty} \frac{v^{n-1} e^{-v}}{(n-1)!} dv, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, la integral anterior puede expresarse en términos de una suma sin más que ir integrando por partes sucesivamente. En efecto, llamando $I_{n,b} = \int_b^{+\infty} y^n e^{-y} dy$ con $b > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} I_{n,b} &= \int_b^{+\infty} y^n e^{-y} dy = \left[\begin{array}{ccc} u = y^n & \rightarrow & du = n y^{n-1} dy \\ dv = e^{-y} dy & \rightarrow & v = -e^{-y} \end{array} \right] = [-y^n e^{-y}]_b^{+\infty} + n I_{n-1,b} \\ &= b^n e^{-b} + n I_{n-1,b} = b^n e^{-b} + n b^{n-1} e^{-b} + n(n-1) I_{n-2,b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= b^n e^{-b} + n b^{n-1} e^{-b} + n(n-1) b^{n-2} e^{-b} + \cdots + n! e^{-b} \\ &= e^{-b} [b^n + n b^{n-1} + n(n-1) b^{n-2} + \cdots + n!] \\ &= e^{-b} \sum_{k=0}^n b^k \frac{n!}{k!} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_{X_t}(n-1) = \int_{\lambda t}^{+\infty} \frac{v^{n-1} e^{-v}}{(n-1)!} dv = \frac{I_{n-1, \lambda t}}{(n-1)!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde se deduce que $X_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.